TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 1

Exercices 1, 3, 4, 8, 10, 13

Exercice 1. (Opérations sur les fonctions holomorphes)

Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Soient $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes sur U. Démontrer que $z \mapsto f(z) + g(z)$ et $z \mapsto f(z)g(z)$ sont holomorphes sur U, et déterminer leur dérivée complexe.
2. On suppose que $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas sur U. Montrer que $z \mapsto 1/f(z)$ est holomorphe sur U et déterminer sa dérivée complexe.
3. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. On suppose que $g(V) \subset U$, de sorte que la fonction $z \mapsto f(g(z))$ est bien définie sur U. Montrer qu'elle est holomorphe et déterminer sa dérivée complexe.

On suit essentiellement la même démonstration que dans le cas réel :

1. Les fonctions $f+g$ et fg sont continues, il suffit donc de démontrer qu'elles sont dérivables au sens complexe sur U. À cette fin, soit $z \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(z)$ – le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre z et de rayon r – soit contenu dans U (puisque U est ouvert). Pour tout $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $|h| < r$, on a alors

$$\frac{(f+g)(z+h) - (f+g)(z)}{h} = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} + \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

et, par hypothèse sur f et g, cette quantité admet une limite pour $h \to 0$ donnée par

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(z+h) - (f+g)(z)}{h} = f'(z) + g'(z).$$

La fonction $(f+g)$ admet donc une dérivée complexe en z, donnée par $f'(z) + g'(z)$. Ainsi, $f + g$ est holomorphe sur U, de dérivée $f' + g'$.

Pour le produit, on peut écrire, (toujours en considérant h non nul tel que $|h| < r$)

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z)}{h} &= \frac{f(z+h) - f(z)}{h} g(z+h) + f(z)\frac{g(z+h) - g(z)}{h} \\ &\to f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\end{aligned}$$

lorsque $h \to 0$, et donc de même, fg est holomorphe sur U de dérivée $f'g + fg'$.

2. Puisque f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est continue. Soit $z \in U$. De même qu'à la question précédente, on écrit

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(z+h)} - \frac{1}{f(z)}\right) = -\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \times \frac{1}{f(z+h)f(z)} \to -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

lorsque $h \to 0$. Comme précédemment, on conclut que $1/f$ est holomorphe sur U de dérivée $-f'/f^2$.

3. Soit $z \in V$ fixé et $w := g(z) \in U$. On peut définir les fonction-restes

$$\varepsilon_f(h) := \begin{cases} \frac{f(w+h)-f(w)}{h} - f'(w)\,, & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varepsilon_g(h) := \begin{cases} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} - g'(z) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $h \in \mathbb{D}_r(0) \setminus \{0\}$ où $r > 0$ est suffisamment petit. On a alors $\lim_{h\to 0} \varepsilon_f(h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon_g(h) = 0$ par hypothèse sur f et g. Il s'ensuit que l'on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{D}_\delta(0)$, le nombre

$$\tilde{h}(h) := h \cdot (g'(z) + \varepsilon_g(h))$$

vérifie $\tilde{h}(h) \in \mathbb{D}_r(0)$. On peut alors écrire pour tout $h \in \mathbb{D}_\delta(0)$,

$$f(g(z+h)) - f(g(z)) = f(w + \underbrace{h(g'(z) + \varepsilon_g(h))}_{=\tilde{h}(h)}) - f(w) = \tilde{h}(h)f'(w) + \varepsilon_f(\tilde{h}(h))$$

par définition de ε_g et ε_f. Or, $\lim_{h\to 0} \tilde{h}(h) = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{h}(h)}{h} = g'(z)$, d'où, par composition des limites,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(z+h)) - f(g(z))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{h}(h)}{h} f'(w) + \varepsilon_f(\tilde{h}) = f'(w)g'(z).$$

La fonction $f \circ g$ est donc holomorphe sur V, de dérivée $(f' \circ g) \cdot g'$.

Exercice 3.

Soit U un domaine de $\mathbb{C}$, c'est à dire un ouvert connexe non-vide, et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. On suppose dans cette question que f est *localement constante*, c'est-à-dire que pour tout $z \in U$, il existe $r > 0$ tel que f soit constante sur $\mathbb{D}_r(z)$. Montrer que f est constante.
2. On suppose que, vue comme une fonction sur une partie de $\mathbb{R}^2$, f est différentiable en tout point de U. Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont nulles sur U, alors f est constante sur U.

1. Méthode 1 : L'ouvert U étant connexe, il est connexe par arcs. Etant donnés deux points a et b de U, il existe donc une fonction continue $\gamma : [0,1] \to U$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On peut alors considérer la fonction continue $g := \mathrm{Re}(f \circ \gamma) : [0,1] \to \mathbb{R}$; on va montrer qu'elle est constante.

   Pour ce faire, fixons $t_0 \in (0,1)$. Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que f soit constante sur $\mathbb{D}_r(\gamma(t_0))$. De plus, comme γ est continue, il existe $\eta > 0$ tel que $\gamma(t') \in \mathbb{D}_r(\gamma(t_0))$ pour tout $t' \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta)$. La fonction g est donc constante sur $(t_0 - \eta, t_0 + \eta)$. En particulier, g est dérivable en t et $g'(t) = 0$. On a donc montré que g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $(0,1)$ de dérivée nulle. Donc g est bel et bien constante.

   On montre de même que $h := \mathrm{Im}(f \circ \gamma)$ est constante. Ainsi, $f(a) = g(0) + ih(0) = g(1) + ih(1) = f(b)$. Comme a et b étaient arbitraires, on conclut que f est constante sur U.

   Méthode 2 : Étant donné $a \in U$, considérons l'ensemble $U_a := \{z \in U \mid f(z) = f(a)\}$. On a $U_a \neq \emptyset$ puisque $a \in U_a$. De plus, U_a est à la fois ouvert et fermé dans U. En effet,

   (i) il est fermé, car c'est l'image réciproque du singleton $\{f(a)\}$ – qui est un ensemble fermé – par la fonction continue f,

   (ii) il est ouvert, car pour tout point $z \in U_a$, il existe $r > 0$ tel que f soit constante – et donc égale à a – sur $\mathbb{D}_r(z)$. Autrement dit, $\mathbb{D}_r(z) \subset U_a$.

   Il est donc nécessaire que U_a soit U tout entier. Sinon, on aurait la décomposition $U = U_a \cup V$ où U_a et $V := U \setminus U_a$ sont ouverts (V est ouvert comme complémentaire du fermé U_a dans U), non-vides (V est non-vide puisque U_a est supposé différent de U) et manifestement disjoints ; or une telle décomposition est impossible par définition puisque U est connexe.
2. Par hypohèse, la fonction f est différentiable en tout point de U et sa différentielle est nulle puisque

$$df(z)[h_x, h_y] = \frac{\partial f}{\partial x} h_x + \frac{\partial f}{\partial y} h_y = 0.$$

Soit $z \in U$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(z) \subset U$, et soient $a, b \in \mathbb{D}_r(z)$. Puisque $\mathbb{D}_r(z)$ est *convexe*, le segment $[a, b]$ est entièrement contenu dans $\mathbb{D}_r(z)$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{x \in]a,b[} \|df(x)\| |b - a| = 0.$$

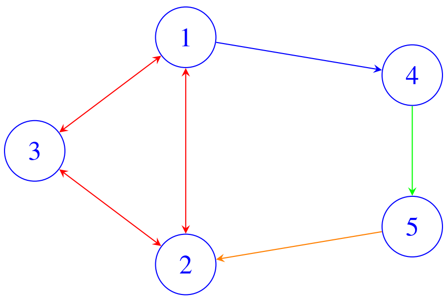
Comme a et b étaient arbitraires, f est constante sur $\mathbb{D}_r(z)$. Elle est donc localement constante, donc constante sur U puisque U est connexe.

Exercice 4.

Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est constante.
2. $\mathrm{Re}(f)$ est constante.
3. $\mathrm{Im}(f)$ est constante.
4. $|f|$ est constant.
5. $\bar{f}$ est holomorphe (on dit que f est anti-holomorphe).

Il suffit de démontrer les implications comme dans le "graphe" suivant :



Premièrement, l'implication $(1) \implies (4)$ est évidente.

Ensuite, on va obtenir les équivalences $(1) \iff (2) \iff (3)$ (flèches rouges) à l'aide des équations de Cauchy-Riemann. En effet, on a établi à l'exercice précédent que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont constantes sur U si et seulement si leurs dérivées partielles sont nulles sur U. Mais en écrivant $f = u + iv$ avec $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$ on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

et donc u est constante si et seulement si v est constante. Ceci établit que $(2) \iff (3)$. On en déduit que $(2) \implies (1)$: si $\mathrm{Re}(f)$ est constante, alors $\mathrm{Im}(f)$ aussi et donc $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ aussi. L'implication $(1) \implies (2)$ étant évidente, ceci montre $(1) \iff (2) \iff (3)$.

À ce stade, on voit qu'**une fonction holomorphe f qui ne prend que des valeurs réelles est nécessairement constante** : en effet, elle vérifie $\mathrm{Im}(f) = 0$; en particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est constante ! Mais d'après l'implication $(3) \implies (1)$, il en découle que f est elle-même constante. Grâce à cette propriété, on constate que si $\bar{f}$ est holomorphe, alors $\mathrm{Re}(f) = \frac{f+\bar{f}}{2}$ est holomorphe et à valeurs réelles, donc constante. Ceci montre $(5) \implies (2)$ (flèche orange).

Enfin, si $|f|$ est constante, alors deux cas se présentent. Soit $|f|$ est identiquement nulle, auquel cas $\bar{f}$ est également nulle, donc holomorphe. Soit $|f|$ prend une valeur constante et *non-nulle* $M > 0$, auquel cas f ne s'annule pas sur U, et donc on peut écrire

$$\bar{f} = \frac{M^2}{f}$$

qui est holomorphe d'après l'exercice 1. Ceci établit l'implication $(4) \implies (5)$, la dernière "flèche verte" manquante pour compléter le graphe.

Exercice 8.

On note $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ (avec l'identification habituelle de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$).

1. (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ suivantes
   - $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$
   - $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$
   - $z \mapsto e^{\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)}$
   - $z \mapsto z$,
   - $z \mapsto \bar{z}$,
   - $z \mapsto z^n$,
   - $z \mapsto \bar{z}^n$.

   (b) Soit $f : z \to P(z)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$. Établir les relations suivantes :
$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = P'(z), \qquad \frac{\partial P(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = P'(\bar{z}), \qquad \frac{\partial P(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P(\bar{z})}{\partial z} = 0.$$

2. (a) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en tout point de U, en tant que fonction de deux variables réelles. Montrer que f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est identiquement nulle.

   (b) Montrer que dans ce cas, on a l'égalité $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$.

3. On dit que f est *antiholomorphe* si elle vérifie $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

   (a) Donner des exemples de fonctions antiholomorphes.

   (b) Montrer qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est antiholomorphe si et seulement si la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur $\overline{U}$.

1. (a)
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}$
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2}$
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1-i}{2}f$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1+i}{2}f$.
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{Re}(z)}{\partial z} + i\frac{\partial \mathrm{Im}(z)}{\partial z} = \frac{1}{2} + i\frac{(-i)}{2} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} + i\frac{i}{2} = 0$.
   - $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1$.
   - $$\frac{\partial z^n}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z^n}{\partial x} - i\frac{\partial z^n}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(n(x+iy)^{n-1} - in(x+iy)^{n-1}\cdot i\right) = n(x+iy)^{n-1} = nz^{n-1}.$$
$$\frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z^n}{\partial x} + i\frac{\partial z^n}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(n(x+iy)^{n-1} + in(x+iy)^{n-1}\cdot i\right) = 0$$
   - De même qu'au point précédent on trouve
$$\frac{\partial \bar{z}^n}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \bar{z}^n}{\partial \bar{z}} = n\bar{z}^{n-1}.$$

   (b) Immédiat par linéarité, d'après les quatre derniers points précédents.

2. (a) Supposons que $f = u + iv$ est holomorphe et calculons
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$
   Or chacun des deux termes au second membre est nul, en vertu des équations de Cauchy-Riemann.

   Réciproquement, supposons que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (et donc, d'après ce qui précède, les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites). Soit $z \in U$. Pour $h = h_1 + ih_2$ suffisamment petit et non-nul, on a
$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(z+h) - u(z)}{h} + i\frac{v(z+h) - v(z)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left[h_1\frac{\partial u}{\partial x} + h_2\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(h_1\frac{\partial v}{\partial x} + h_2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] + \varepsilon(h)\end{aligned}$$

en utilisant la différentiabilité de u et v, et où ε est une fonction-reste vérifiant $0 = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h)$. On peut alors se servir des équations de Cauchy-Riemann pour ne garder que des dérivées partielles par rapport à la variable x :

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left[h_1\frac{\partial u}{\partial x} - h_2\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(h_1\frac{\partial v}{\partial x} + h_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \varepsilon(h) \\
&= \frac{1}{h}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{(h_1+ih_2)}_{=h} + \frac{\partial v}{\partial x}\underbrace{(ih_1-h_2)}_{=ih}\right] + \varepsilon(h) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon(h) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon(h).
\end{aligned}$$

Ainsi, f est $\mathbb{C}$-différentiable et sa dérivée vérifie

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z).$$

(b) On vient de voir que si f est holomorphe, alors $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$. De plus, d'une part, par définition de la dérivée partielle (première égalité), et d'autre part, par définition de la dérivabilité complexe (quatrième égalité),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(z+ti)-f(z)}{t} = i\lim_{t\to 0}\frac{f(z+ti)-f(z)}{ti} = i\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = if'(z).$$

Ainsi, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f'(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$, donc on trouve

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

en effectuant la "moyenne" des deux formules précédentes.

3. (a) Par exemple $z \mapsto \bar{z}$, et plus généralement $z \mapsto P(\bar{z})$ pour un polynôme P (on l'a vu à la question 1(b)).

(b) Notons $g : \overline{U} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) := f(\bar{z}) = f(x-iy).$$

D'après cette définition, on a les relations

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{z}), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z) = -\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{z}),$$

et ainsi,

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right)(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(\bar{z}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}).$$

D'après la question 2(b), la dernière quantité est nulle pour tout $z \in U$ si et seulement si f est holomorphe. Cette égalité montre donc que g est anti-holomorphe si et seulement si f est holomorphe.

Exercice 10.

Pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\left\{r \geq 0 \;\middle|\; \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\} \in [0, +\infty]$$

1. (a) Montrer l'égalité

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right) := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}|a_k|^{1/k}\right).$$

(avec les conventions $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$)

   (b) Si tous les (a_n) sont non nuls à partir d'un certain rang, montrer qu'on a l'inégalité $1/R \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
2. Peut-on avoir $R = 0$?
3. Rappeler les démonstrations des propriétés fondamentales suivantes :
   (a) Pour $0 \leq r < R$, la série entière converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$.
   (b) Si$|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (terme général non borné).
4. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
5. (a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum z^n$, $\sum n^{-2} z^n$ et $\sum n^{-1} z^n$.
   (b) Etudier la convergence des deux permières séries sur le cercle de convergence.
   (c) Etudier la convergence de la troisième série aux deux points ± 1.
   (d) Bonus. Etudier la convergence de la troisième série sur le cercle de convergence (cette question nécessite de connaître la transformation d'Abel).

Rappelons les propriétés suivantes de la $\limsup$ (illustrées sur la Figure 1).

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit $L := \limsup_{n\to\infty} u_n$. Alors*
(i) Pour tout $L_+ > L$, il n'existe qu'un nombre fini *d'entiers n tels que $u_n \geq L_+$.*
(ii) Pour tout $L_- < L$, il existe une infinité *d'entiers n tels que $u_n > L_-$.*

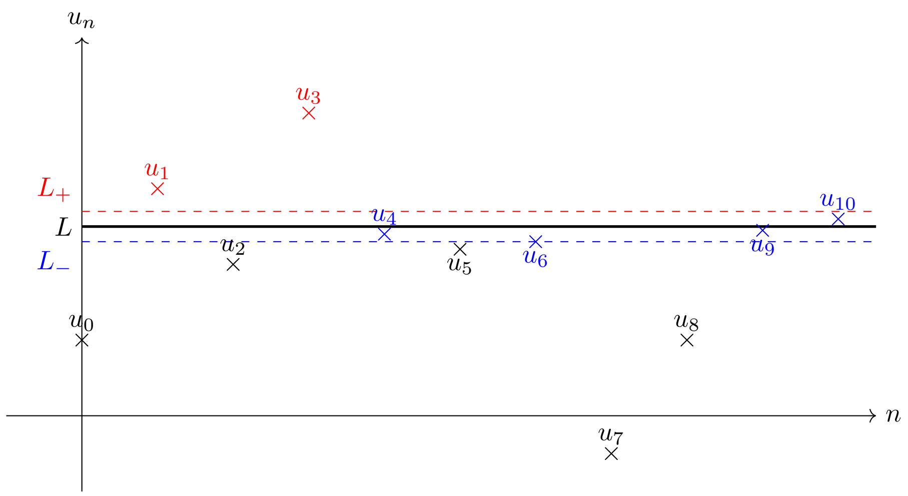


FIGURE 1 – Si la suite admet L pour limite supérieure, il y a au plus un nombre fini croix rouges et un nombre infini de croix bleues.

Démonstration. La suite $v_n := \sup_{k\geq n} u_k$ est *décroissante* (puisque le supremum est pris sur des ensembles de plus en plus petits), donc $L = \lim_{n\to\infty} v_n$. En particulier, si $L_+ > L$, la suite $(v_n)_n$ finit par "passer sous L_+" : il existe n^* tel que $v_{n^*} < L_+$, et donc pour tout $n \geq n^*$,

$$u_n \leq \sup_{k\geq n^*} u_k = v_{n^*} < L_+$$

Ceci montre (i). D'autre part, si $L_- < L$, alors $v_n \geq L > L_-$ pour tout entier n, et donc pour chaque n, on peut trouver $k \geq n$ tel que $u_k > L_-$, ce qui montre (ii). □

1. (a) Notons $M := \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{1/n}\right)$. On suppose que $M < \infty$, et on fixe un réel positif $r < \frac{1}{M}$ (n'importe quel réel $r > 0$ si $M = \infty$). En notant $m = \frac{1}{r}$, on a donc $m > M$. La propriété (i) de la Proposition 1 implique que l'on peut trouver n_0 tel que

$$|a_n|^{1/n} \leq m \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Mais ceci équivaut à

$$|a_n| r^n \leq 1 \quad \text{pour tout } n \geq n_0$$

par définition de r et m. Ainsi, la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée, donc $R \geq r$. Comme $r < \frac{1}{M}$ était arbitraire, on en déduit que

$$\frac{1}{R} \leq \limsup_{n\to\infty}(|a_n|^{1/n}).$$

On a supposé que M était fini, mais l'inégalité précédente est toujours vérifiée dans le cas contraire.

Réciproquement, supposons que $M > 0$, et fixons un réel $r > \frac{1}{M}$. On peut alors intercaler un réel r' de sorte que $r > r' > \frac{1}{M}$. En notant $m = \frac{1}{r'}$, on a donc $m < M$. La propriété (ii) permet de trouver $n_1 < n_2 < \ldots$ une suite infinie strictement croissante d'entiers telle que pour tout i,

$$|a_{n_i}|^{1/n_i} > m.$$

Mais ceci équivaut à

$$|a_{n_i}|r^{n_i} > \left(\frac{r}{r'}\right)^{n_i} \to \infty \text{ lorsque } i \to \infty,$$

et donc la suite $(a_n r^n)$ n'est jamais bornée pour $r > \frac{1}{M}$. On en déduit que $R \leq \frac{1}{M}$, i.e.,

$$\frac{1}{R} \geq \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}.$$

On a supposé que $M > 0$, mais l'inégalité précédente est toujours vraie si $M = 0$.

(b) Soit $M := \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Si $M = \infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, fixons un réel positif $r < \frac{1}{M}$ arbitraire et posons $m = \frac{1}{r}$, de sorte que $m > M$. D'après la propriété (i) de la Proposition 1, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,, \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq m$$

Ceci implique que la suite $|u_n| := a_n r^n$ vérifie alors

$$|u_{n+1}| = r\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||u_n| = \frac{1}{m}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||u_n| \leq |u_n| \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Elle est donc décroissante à partir d'un certain rang, donc bornée. Ainsi, $R \geq r$. Comme $r < \frac{1}{M}$ était arbitraire, on conclut que

$$\frac{1}{R} \leq \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Pour voir que l'inégalité peut être stricte, on peut considérer par exemple la suite a_n définie par

$$a_{2k} := 2^{2k}\,, \quad a_{2k+1} := 3 \cdot 2^{2k+1}.$$

On a alors

$$a_n^{1/n} \leq (3 \cdot 2^n)^{1/n} = 3^{1/n} \cdot 2 \to 2$$

lorsque $n \to \infty$, tandis que pour tout n pair,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^n} = 6 > 2.$$

2. On peut avoir $R = 0$. C'est par exemple le cas si $a_n = 2^{n^2}$, puisque dans ce cas, $a_n^{1/n} = 2^n$ tend vers l'infini.
3. Soit $0 \leq r < R$ donné. Il existe r_+ tel que $r < r_+ < R$, et par définition de R, la suite $(a_n r_+^n)_n$ est bornée. Mais comme

$$|a_n|r^n = |a_n|r_+^n\left(\frac{r}{r_+}\right)^n,$$

il s'ensuit que

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n \leq \max_{n\in\mathbb{N}}\left(|a_n|r_+^n\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_+}\right)^n < \infty$$

puisque $\frac{r}{r_+} < 1$. La série $\sum_n a_n z^n$ est donc normalement convergente sur $\overline{D(0,r)}$.

D'autre part, si $|z| > R$, le terme général de la série $\sum a_n z^n$ n'est pas borné par définition de R, donc la série diverge grossièrement.

4. La suite $n^{1/n}$ converge vers 1 (puisque $n^{1/n} = \exp(\ln(n)/n)$ et $\ln(n)/n \to 0$). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,, \quad n^{1/n} \leq 1 + \varepsilon$$

On en déduit que pour tout $n \geq n_0$

$$\sup_{k \geq n} |ka_k|^{1/k} \leq (1+\varepsilon) \sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k}$$

et donc

$$\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} |ka_n|^{1/k} \right) \leq (1+\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} |a_k|^{1/k} \right) = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

L'autre inégalité est immédiate.

5. (a) D'après la question précédente, les trois séries entières ont le même rayon de convergence. La première série entière correspond à la suite constante $a_n \equiv 1$, donc son rayon de convergence est 1.

   (b) La première série diverge grossièrement sur le cercle de convergence, et la seconde converge y converge absolument (d'après le critère de Riemann).

   (c) Pour $z = 1$, la troisième série est célèbrement divergente, tandis que pour $z = -1$, elle est convergente (par le critère des séries alternées).

   (d) On va montrer que la troisième série converge pour tout $z \neq 1$ sur le cercle de convergence. Pour ce faire, on utilise la "transformation d'Abel", ou intégration par parties discrète. Notons $\frac{\delta}{\delta n}$ l'opérateur de "dérivée discrète" sur les suites :

$$\frac{\delta u}{\delta n}(k) := u_{k+1} - u_k.$$

   On a une version discrète du théorème fondamental de l'analyse

$$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{\delta u}{\delta n}(k) = u_n - u_m.$$

   De plus, la dérivée discrète d'un produit est donnée par

$$\frac{\delta(uv)}{\delta n}(k) = u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k = u_{k+1}\frac{\delta v}{\delta n}(k) + v_k \frac{\delta u}{\delta n}(k).$$

   En "intégrant" de part et d'autres, on voit donc que

$$u_n v_n - u_m v_m = \sum_{k=m}^{n-1} v_{k+1}\frac{\delta v}{\delta n}(k) + v_k \frac{\delta u}{\delta n}(k)$$

   ou encore,

$$\sum_{k=m}^{n-1} v_k(u_{k+1} - u_k) = u_n v_n - u_m v_m - \sum_{k=m}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) u_{k+1}.$$

   On applique ceci avec $m = 1$, $v_k = \frac{1}{k}$ et, pour un $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$u_n := \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

   Observons que $u_{n+1} - u_n = e^{in\theta}$. La formule d'Abel nous donne donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} e^{ik\theta} = \frac{e^{in\theta}}{n} - \frac{e^{i\theta}}{1} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1 - e^{ik\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

   (on a "dérivé" le terme rouge, $k \mapsto 1/k$, et "intégré" le terme vert $k \mapsto e^{ik\theta}$. On y gagne car intégrer le terme vert ne coûte pas cher (il reste borné en k si $\theta \neq 1$), tandis que dériver le terme rouge nous fait gagner une puissance de $1/k$).

Le terme de droite admet une limite finie lorsque $n \to \infty$. En effet, $e^{in\theta}/n \to 0$ et

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \infty$$

d'après le critère de Riemann. Ceci montre que la suite des sommes partielles de $\sum n^{-1} z^n$ est convergente.

Exercice 13.

On définit, quand c'est possible, la fonction sinus par $\sin(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1}$.

1. Les propositions suivantes sont elles vraies ?
   (a) La fonction sinus est bien définie sur $\mathbb{C}$.
   (b) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.
   (c) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \Im\left(e^{iz}\right)$.
   (d) La fonction sinus est bornée sur $\mathbb{C}$.
   (e) Si $z \in \mathbb{R}$ alors la fonction sinus est la fonction habituelle sur $\mathbb{R}$.
   (f) Il existe une fonction f holomorphe différente du sinus complexe, mais qui coïncide avec le sinus réel quand $z \in \mathbb{R}$ (on admet que tout fonction holomorphe est analytique sur son domaine de définition).
2. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a t-on $\sin(z) = 0$?
3. Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$ est holomorphe sur le disque ouvert $D(0,1)$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce en contradiction avec le principe de zéros isolés ?

1. (a) Vrai : la série vérifie

$$|\sin(z)| \leq \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{|z|^{2p+1}}{(2p+1)!} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} < \infty.$$

Rappel : soit $k_0 > |z|+1$ un entier. Alors

$$k! = k(k-1)\dots k_0(k_0-1)! \geq (k_0-1)!(|z|+1)^{k-k_0+1},$$

donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{(|z|+1)^{k_0-1}}{(k_0-1)!} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{|z|+1} \right)^k < \infty.$$

(b) Vrai : en effet,

$$\frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i} = z^n i^{n-1} \frac{(1-(-1)^n)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

et la formule s'en déduit par sommation.

(c) Faux. Par exemple, d'après (b),

$$\sin(i) = \frac{e^{-1}-e^{1}}{2i} \in i\mathbb{R}$$

tandis que $\text{Im}(e^{iz}) \in \mathbb{R}$ pour tout z.

(d) Faux. Par exemple, d'après (b), on a pour tout réel r,

$$|\sin(ir)| = \frac{|e^r - e^{-r}|}{2},$$

et donc en particulier,

$$\lim_{r\to\pm\infty} |\sin(ir)| = \infty.$$

(e) Vrai (trivialement si l'on part de la définition via la série entière, ou d'après (b) si l'on part de la définition par les formules d'Euler).

(f) Vrai...

... mais FAUX si l'on demande que f soit définie *sur un ouvert* **connexe**. En effet, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert *connexe* contenant $\mathbb{R}$, et supposons que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et coïncide avec le sinus réel sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction holomorphe $f - \sin : \Omega \to \mathbb{C}$ s'annule identiquement sur la droite réelle. Or, $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation dans Ω (par exemple, le point 0 limite de la suite injective $2^{-n} \in \mathbb{R} \subset \Omega$ pour $n \in \mathbb{N}$), donc par le principe des zéros isolés, la fonction $f - \sin$ est nulle sur Ω tout entier

En revanche, s'il n'est pas demandé à Ω d'être connexe, il est facile de construire un exemple : on peut par exemple considérer $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 := \{\mathrm{Im}(z) < 1\} \cup \{\mathrm{Im}(z) > 2\}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) := \begin{cases} \sin(z) & \text{si } z \in \Omega_1 \\ 0 & \text{si } z \in \Omega_2. \end{cases}$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = 1 \iff z \in (2\pi i)\mathbb{Z}.$$

Ainsi,

$$\sin(z) = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 0 \iff 2iz \in (2\pi i)\mathbb{Z} \iff z \in \pi\mathbb{Z}.$$

La fonction sinus complexe n'a donc que les zéros réels déjà connus.

3. Puisque $1 - z$ ne s'annule pas sur $\mathbb{D} = D(0,1)$, la fonction $z \mapsto \pi/(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ (Exercice 1. question 2), et donc f l'est également par composition (Exercice 1, question 3) puisque sin est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Pour tout $z \in D(0,1)$, on a

$$f(z) = 0 \iff \frac{\pi}{1-z} \in \pi\mathbb{Z} \iff \frac{1}{1-z} \in \mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}^* : z = 1 - \frac{1}{k}.$$

La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $z_k = 1 - \frac{1}{k}$ est une suite injective de zéros de f. De plus, elle converge dans $\mathbb{C}$ vers la limite $z_\infty = 1$. Le principe des zéros isolés assure que les zéros de f ne peuvent pas admettre un point d'accumulation **dans** $\mathbb{D}$ (rappel : dans la démonstration, on introduit un disque centré en z_∞ et inclus dans le domaine Ω, et on développe f en série entière sur ce disque). Ici, il n'y a pas de problème car $z_\infty \notin \mathbb{D}$ (voir la Figure 2).

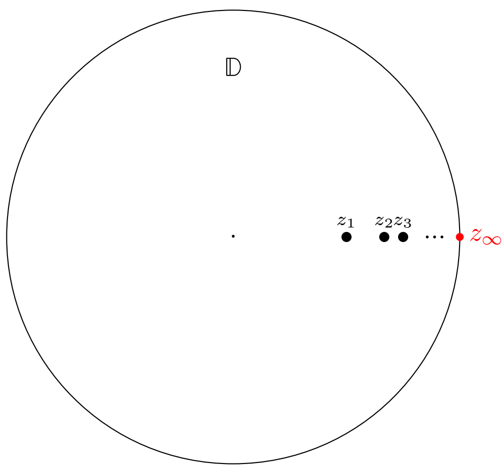


FIGURE 2 – Les zéros d'une fonction analytique non nulle sur un ouvert connexe Ω peuvent tout à fait s'accumuler au bord de Ω.