TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 2

Exercices 18, 20, 21, 14, 17, 9

Exercice 18.

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle, et soit $K \subset U$ un compact de $\mathbb{C}$. On note $K_0 = f^{-1}(\{0\}) \cap K$ l'ensemble des points d'annulation de f sur K. Montrer que K_0 est fini.

Solution 18
Si K_0 est infini, on peut trouver une suite injective $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K_0. Mais comme L'ensemble K_0 est fermé (comme intersection de fermés) et borné (puisque K l'est), il est compact donc $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (elle aussi injective) convergente vers une limite $\ell \in K_0$. De plus, puisque $K_0 \subset U$, on a $\ell \in U$. Cette limite est donc un point d'accumulation de K_0 dans U, contradiciton avec le principe des zéros isolés.

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. On suppose que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n_0)}(z_0) = 0$. Démontrer que f est un polynôme.

Solution 20
On considère le compact $K = \overline{\mathbb{D}}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $K_n := (f^{(n)})^{-1}(0) \cap K$ l'ensemble des zéros de la fonction analytique $f^{(n)}$ sur le compact K. Par hypothèse, on a

$$\overline{\mathbb{D}} = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

Il existe donc au moins un entier n_0 tel que K_{n_0} soit infini (sinon, l'ensemble à droite de l'égalité serait dénombrable). Par contraposée de l'exercice précédent, on en déduit que $f^{(n_0)}$ est identiquement nulle, ce qui implique que f est un polynôme de degré au plus $n_0 - 1$.

Exercice 21. (Logarithmes complexe)

Dans cet exercice, $\Omega \subset \mathbb{C}$ désigne un ouvert *connexe* et *ne contenant pas* 0. On dit qu'une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est un *logarithme complexe sur* Ω si elle vérifie

$$\exp(f(z)) = z \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

1. Démontrer que deux logartihmes complexes sur Ω diffèrent par un multiple entier de $2i\pi$.
2. On suppose que f est un logarithme complexe sur Ω. Montrer que f est holomorphe et que pour tout $z \in \Omega$,
$$f'(z) = \frac{1}{z}$$
Indication : on pourra par exemple calculer $\lim_{h\to 0} \frac{e^{f(z+h)} - e^{f(z)}}{f(z+h) - f(z)}$.
3. Réciproquement, on suppose qu'il existe une primitive holomorphe de $\frac{1}{z}$ sur Ω. Montrer qu'il existe un logarithme complexe sur Ω.

4. Soit Γ_r le lacet orientée décrivant le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer
$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z}.$$
En déduire que si Ω contient un cercle centré en 0, alors il n'existe pas de logarithme complexe sur Ω.
5. On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls et
$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-.$$
Montrer qu'il existe une fonction $\arg : \mathbb{C}^- \to]-\pi, \pi[$ de classe C^1 (au sens de la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$) telle que
$$z = |z|e^{i\arg(z)} \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^-.$$
6. Pour tout $z \in \mathbb{C}_-$, on pose
$$\mathrm{Log}(z) := \ln(|z|) + i\arg(z).$$
Vérifier que Log est bien définie et fournit un logarithme complexe sur $\mathbb{C}^-$. Plus généralement, montrer que pour tout réel θ_0, il existe un logarithme complexe sur l'ouvert
$$\mathbb{C} \setminus e^{i\theta_0}\mathbb{R}_-.$$

Solution 21

1. Soient f_1 et f_2 deux logarithmes complexes sur Ω, et soit $h := f_1 - f_2$ leur différence. Alors h est continue (puisque f_1 et f_2 le sont par hypothèse). De plus,
$$\exp(h(z)) = \exp(f_1(z) - f_2(z)) = \frac{\exp(f_1(z))}{\exp(f_2(z))} = 1 \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$
Ainsi, $h(\Omega) \subset 2\pi i\mathbb{Z}$, et comme $h(\Omega)$ est connexe (puisque c'est l'image de l'ensemble connexe Ω par la fonction continue h), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h(\Omega) = \{2\pi i k\}$.
2. Soit $z \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(z) \subset \Omega$. Soit $w := f(z)$ et pour tout $h \in \mathbb{D}_r(z)$, notons
$$\varepsilon(h) := f(z+h) - f(z).$$
La continuité de f assure que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. De plus, on $\varepsilon(h) \neq 0$ pour tout $h \neq 0$, puisque
$$\varepsilon(h) = 0 \implies \exp(\varepsilon(h)) = 1 \iff \frac{\exp(f(z+h))}{\exp(f(z))} = 1 \iff \frac{z+h}{z} = 1 \iff h = 0.$$
Ainsi, par composition des limites, et puisque $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$,
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{f(z+h)} - e^{f(z)}}{f(z+h) - f(z)} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{w+\varepsilon(h)} - e^w}{\varepsilon(h)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{w+\varepsilon} - e^w}{\varepsilon} = e^w = z$$
(comme f est un logarithme complexe sur Ω). La limite ci-dessus étant non-nulle, on en déduit par passage à l'inverse que
$$\frac{1}{z} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{e^{f(z+h)} - e^{f(z)}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{z+h-z} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$
Donc f est continue et dérivable au sens complexe en tout point $z \in \Omega$, donc holomorphe, et sa dérivée est donnée par $z \mapsto \frac{1}{z}$.
3. Soit g une primitive holomorphe de $\frac{1}{z}$ sur Ω et soit $z_0 \in \Omega$. Soit $k \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(k) = z_0$ (en écrivant z_0 sous forme polaire $z = re^{i\theta}$, le complexe $k := \ln(r) + i\theta$ convient). On va montrer que
$$f(z) := g(z) - g(z_0) + k$$
est un logarithme complexe sur Ω. À cette fin, considéron $h : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction
$$h(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}.$$

Cette fonction est holomorphe (comme composition et quotient de fonctions holomorphes), et vérifie $h(z_0) = 1$ par construction. De plus,

$$h'(z) = \frac{zf'(z) - 1}{z^2} \exp(f(z)) = \frac{zg'(z) - 1}{z^2} \exp(f(z)) = \frac{z\frac{1}{z} - 1}{z^2} \exp(f(z)) = 0.$$

Puisque Ω est connexe, h est donc constante, donc partout égale à $1 = h(z_0)$. Il s'ensuit que $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

4. Soit $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \Gamma_r$ la paramétrisation de Γ_r définie par $\gamma_r(\theta) := re^{i\theta}$. On a alors

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_r'(\theta) d\theta}{\gamma_r(\theta)} = 2\pi i \neq 0.$$

Il ne peut donc pas exister de primitive holomorphe de $\frac{1}{z}$ sur Ω, car sinon on aurait, en notant F une telle primitive

$$\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z} = F(\gamma_r(0)) - F(\gamma_r(2\pi)) = F(r) - F(r) = 0.$$

D'après (la contraposée de) la question 2, il ne peut donc pas exister de logarithme complexe sur Ω.

5. L'application

$$J :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{C}^- , \quad (r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$$

est de classe C^1, bijective, et pour tout $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, sa différentielle au point (r, θ) est donnée par

$$dJ(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dont le déterminant vaut r, qui est donc non-nul. La différentielle est donc inversible en tout point. D'après le théorème d'inversion globale, la bijection réciproque J^{-1} est de classe C^1. On remarque que si $z = J(r, \theta)$, alors $r = |z|$. Notons π_2 la projection sur la seconde coordonnée, i.e., $\pi_2(r, \theta) := \theta$. En posant

$$\arg(z) := \pi_2(J^{-1}(z)) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^-$$

(qui est de classe C^1 sur $\mathbb{C}^-$ par composition) on a alors pour tout $z \in \mathbb{C}^-$

$$z = J(J^{-1}(z)) = J(|z|, \arg(z)) = |z|e^{i\arg(z)}.$$

6. D'après la question précédente, Log est continue sur $\mathbb{C}^-$, et pour tout $z \in \mathbb{C}^-$,

$$\exp(\mathrm{Log}(z)) = \exp(\ln(|z|) + i\arg(z)) = |z|e^{i\arg(z)} = z.$$

Soit $f := i\theta_0 + \mathrm{Log} \circ r$, où r est définie par

$$r : \mathbb{C} \setminus e^{i\theta_0}\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}^- , \quad z \mapsto e^{-i\theta_0} z.$$

La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta_0}\mathbb{R}_-$ par composition de fonctions continues, et vérifie

$$\exp(f(z)) = e^{i\theta_0} e^{\mathrm{Log}(r(z))} = e^{i\theta_0} r(z) = e^{i\theta_0} e^{-i\theta_0} z = z.$$

C'est donc un logarithme sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta_0}\mathbb{R}_-$.

Exercice 14.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes. On note $Z_Q = Q^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des racines de Q, que l'on suppose non-vide. Soit $\Omega := \mathbb{C} \setminus Z_Q$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

1. Démontrer que f est holomorphe sur Ω et qu'en chaque point $z_0 \in \Omega$, elle admet un développement en série entière dont le rayon de convergence $R(z_0)$ vérifie

$$R(z_0) \geq \min_{z \in Z_Q} |z - z_0|.$$

2. Démontrer que si
$$P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0) = \emptyset$$
alors l'inégalité précédente est une égalité, i.e.,
$$R(z_0) = \min_{z \in Z_Q} |z - z_0| \quad \text{pour tout } z_0 \in \Omega.$$

Solution 14 1. La fonction f est holomorphe sur Ω comme quotient, puisque Q ne s'annule jamais sur Ω (par construction). Quitte à appliquer une translation, on peut supposer que $z_0 = 0$ (et donc $0 \notin Z_Q$). De plus, en utilisant la décomposition en élément simples des fractions rationnelles sur $\mathbb{C}$, on peut écrire f comme la somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions de la forme
$$z \mapsto (z-w)^{-p}, \quad w \in Z, \ p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$
Pour $p = 1$, la fonction $(z-w)^{-1}$ admet le développement en série entière en 0
$$(z-w)^{-1} = -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - z/w} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}},$$
dont le rayon de convergence vaut $|w|$. Par dérivation terme à terme, la fonction
$$(z-w)^{-p} = \frac{(-1)^{p+1}}{p!} \frac{d^p}{dz^p} (z-w)^{-1}$$
admet elle aussi un développement en série entière de même rayon de convergence $|w|$. Ainsi par linéarité, f admet un développement en série entière en 0 de rayon de convergence **au moins** $\min_{w \in Z_Q} |w|$.

2. Notons
$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$
le développement en série entière de f en 0 et supposons par l'absurde que son rayon de convergence R vérifie $R > r := \min_{w \in Z_Q} |w|$. Alors d'une part (i) : la fonction $g : D(0, R)$ définie par
$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
est continue sur $\overline{D(0,r)}$ (la série converge normalement sur cet ensemble puisque $r < R$), donc bornée sur $D(0,r)$. Mais d'autre part (ii) : g coïncide avec f sur $D(0,r)$ par définition des coefficients $(a_n)_n$. Or, il existe $w^* \in Z_Q$ tel que $|w^*| = \alpha$; et puisque $P(w^*) \neq 0$ par hypothèse, les opérations habituelles sur les limites assurent que
$$\lim_{|z| < \alpha, z \to w^*} |f(z)| = \frac{|P(w^*)|}{\lim_{z \to w^*} |Q(z)|} = +\infty.$$
En particulier, g n'est pas bornée sur $D(0,r)$, contredisant (i).

Exercice 17. 1. Discuter l'existence et l'unicité d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout entier $n \geq 2$, les égalités :

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$,
(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$
(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}$,
(d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Même question pour une fonction holomorphe $h : D(1,1) \to \mathbb{C}$, vérifiant pour tout $n \geq 1$ les égalités :

(a) $h\left(\frac{1}{n}\right) = 0$,
(b) $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solution 17 1. (a) Une telle fonction existe : $z \mapsto 1-z$. D'autre part, comme $\mathbb{D}$ est connexe, et comme $0 \in \mathbb{D}$ est un point d'accumulation de l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \right\} \subset \mathbb{D}\,,$$

le principe des zéros isolés assure que deux fonctions f et g holomorphes sur $\mathbb{D}$ et coïncidant sur E sont nécessairement égales. En effet, l'ensemble zéros de la différence $h = f - g$ admet un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$, donc h est identiquement nulle. Ceci montre que $z \mapsto 1 - z$ est l'unique fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ vérifiant les égalités requises.

(b) Il n'existe aucune fonction holomorphe vérifiant cela. En effet, supposons par l'absurde que f est une fonction holomorphe vérifiant ces égalités. En ne considérant que les entiers n positifs, on constate en particulier que f coïncide avec la fonction holomorphe $z \mapsto z$ sur l'ensemble E défini ci-dessus. Par le même raisonnement que dans la questino précédente, ceci entraîne donc que

$$f(z) = z;$$

et ainsi, $f(-1/2) = -1/2$. Or $f(-1/2) = 1/2$ par hypothèse (pour $n = -2$) : contradiction.

(c) En raisonnement comme au point (a), on trouve que l'unique fonction f satisfaisant ces égalités est $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$.

(d) Aucune telle fonction n'existe : on peut le voir en utilisant le fait que $r \mapsto \sqrt{r}$ n'est pas dérivable en $r = 0$.

En effet, supposons par l'absurde qu'une telle fonction f existe. Comme f est holomorphe, elle est continue en 0 donc, par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

D'autre part, f est dérivable au sens complexe en 0, elle doit donc vérifier

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(0+1/n) - f(0)}{1/n};$$

en particulier la limite ci-dessus doit exister et être *finie*. Mais ceci est incompatible avec les hypothèses puisque

$$\frac{f(0+1/n) - f(0)}{1/n} = n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right) = \sqrt{n},$$

qui diverge lorsque $n \to \infty$

2. (a) Il y a existence mais pas unicité : les fonctions

$$h_1(z) = 0 \quad \text{et} \quad h_2(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

sont distinctes et vérifient toutes les égalités (encore une fois, nous voyons que les zéros d'une fonction holomorphe non nulle peuvent s'accumuler au bord de son domaine de définition sans contredire le principe des zéros isolés).

(b) Il ne peut pas y avoir unicité, puisque pour toute fonction h vérifiant les conditions, la fonction $h + h_2$ (où $h_2(z) = \sin(\pi/z)$ comme ci-dessus) est distincte de h et vérifie toujours les conditions. Pour l'existence, puisque $D(1,1) \subset \mathbb{C}^-$, la détermination principale du logarithme, $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ fournit un logarithme complexe sur $D(1,1)$, et la fonction $f(z) := \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)\right)$, qui est holomorphe par composition, vérifie

$$f(1/n) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1/n)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 9. (Fonction harmoniques et fonctions holomorphes)

Dans cet exercice, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ désigne un domaine (un ouvert connexe non-vide) et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Le *Laplacien* de u, que l'on note Δu, est la fonction définie sur Ω par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Pour une fonction f à valeurs complexes, cette définition est étendue par linéarité : $\Delta f := \Delta \mathrm{Re}(f) + i\Delta \mathrm{Im}(f)$. On dit que f est *harmonique* si $\Delta f = 0$ sur Ω. Dans cet exercice, on admet toute fonction holomorphe est de classe C^2 (au sens de la différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$) sur son ouvert de définition.

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Vérifier que $\Delta f = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$.
2. En déduire que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.
3. Réciproquement, démontrer que toute fonction harmonique réelle u est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe ; autrement dit, que pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une fonction holomorphe $f : \mathbb{D}_r(z) \to \mathbb{C}$ telle que u coïncide avec $\mathrm{Re}(f)$ sur $\mathbb{D}_r(z)$. *Indication raisonner par analyse synthèse.*
4. On se propose maintenant de démontrer que le résultat précédent n'est pas vérifié “globalement”. À cette fin, on considère le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$u(x, y) := \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$
   (a) Vérifier que u est harmonique.
   (b) Démontrer que si une fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(f) = u$, alors
$$\mathrm{Re}\left(f'(z) - \frac{1}{z}\right) = 0.$$
   (c) En déduire que si une telle fonction existe, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Conclure.

Solution 9

1. D'après le résultat admis et le théorème d'interversion des dérivées partielles de Schwarz, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ commutent sur l'espace des fonctions holomorphes. On a donc, pour toute fonction f holomorphe
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - i^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \frac{1}{4}\Delta f.$$
2. Si f est holomorphe, alors $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, donc d'après la question précédente, $\Delta f = 0$.
3. Soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$. Il suffit de montrer qu'il existe une fonction holomorphe f telle que $u = \mathrm{Re}(f)$ sur $\mathbb{D}_r(z)$. Quitte à appliquer une translation et une dilatation, on peut supposer que $z_0 = 0$ et $r = 1$. Supposons (analyse) qu'une telle fonction f existe, et écrivons là sous la forme $f = u + iv$ où v est de classe C^2 et à valeurs réelles. Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{D}$, on a
$$\begin{aligned} v(x, y) &= v(0, 0) + (v(x, 0) - v(0, 0)) + (v(x, y) - v(x, 0)) \\ &= v(0, 0) + \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0)\, dt + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x, t)\, dt. \end{aligned}$$
Si f est holomorphe, elle doit vérifier les équations de Cauchy-Riemann, ce qui permettrait d'exprimer les dérivées partielles ci-dessus en fonction de u. Ceci nous conduit donc (synthèse) à considérer $f := u + iv$ où
$$v(x, y) := -\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, 0)\, dt + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\, dt.$$
Il suffit de vérifier que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse, on a d'une part
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y),$$
et d'autre part, par dérivation sous le signe intégral (possible car u est de classe C^2)
$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\, dt \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - \int_0^y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, t)\, dt \quad \text{(car } u \text{ est harmonique)} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) - \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, t)\right]_0^y \\ &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

4. (a) On trouve
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
et donc $\Delta u = \frac{2}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

(b) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\text{Re}(f) = u$. En notant $f = u + iv$ (où $v = \text{Im}(f)$) on a pour tout $z = x + iy$,
$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$
En particulier, $\text{Re}(f'(z)) = \frac{\partial u}{\partial x}$. Mais
$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{x}{x^2+y^2} = \text{Re}\left(\frac{x-iy}{|z|^2}\right) = \text{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{z}\right),$$
d'où
$$\text{Re}\left(f'(z) - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

(c) On sait qu'une fonction holomorphe de partie réelle constante est constante (rappel : on utilise les équations de Cauchy-Riemann, voir le TD1). On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ telle que
$$f'(z) = \frac{1}{z} + C.$$
La fonction $f(z) - Cz$ fournit alors une primitive holomorphe de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω.

(d) On vient de voir que si une telle fonction f existait, alors il existerait une primitive holomorphe de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ce qui contredirait l'exercice 21 (questions 2 et 4) puisque cet ensemble contient le cercle unité.