

TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 3

Exercices 3, 8, 11, 16, 18, 21, 22

Exercice 3.

Soit $a > 0$. Pour $R > 0$, soit γ_R le rectangle de sommets $-R, R, R + ia, -R + ia$, orienté dans le sens direct.

1. Déterminer l'intégrale $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx.$$

Solution 3 1. $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui est un voisinage ouvert du rectangle plein, qui est étoilé en chacun de ses points (puisque convexe). D'après le théorème de "Cauchy étoilé",

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^{-x^2} \cos(ax)| \leq e^{-x^2}$, et la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable. Pour calculer son intégrale, on utilise la question précédente. Après paramétrage,

$$0 = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt + i \int_0^a e^{-(R+it)^2} dt - \int_{-R}^R e^{-(t+ia)^2} dt - i \int_0^a e^{-(-R+it)^2} dt.$$

En remarquant que

$$\int_0^a e^{-(R+it)^2} dt = \overline{\int_0^a e^{-(R-it)^2} dt},$$

on peut passer à la partie réelle dans l'équation précédente, ce qui donne,

$$\int_{-R}^R e^{-t^2+a^2} \cos(2at) dt = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, et en remplaçant a par $\frac{a}{2}$, on obtient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(at) dt = e^{-\frac{a^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = e^{-\frac{a^2}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Exercice 8. (Intégrale de Fresnel)

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

1. En effectuant par exemple le changement de variable $u = x^2$, démontrer que $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas intégrable sur $(0, +\infty)$.

2. Pour $R > 0$, on considère le lacet γ_R qui parcourt le bord du secteur de disque de sommets 0 , R et $Re^{i\pi/4}$ dans le sens trigonométrique. Faire un dessin de γ_R . En considérant $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$, montrer que

$$\int_0^R e^{-ix^2} dx = e^{-i\pi/4} \left(\int_0^R e^{-t^2} dt + iR \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 e^{2i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right)$$

3. Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} |R \exp(-R^2 e^{2i\theta}) e^{i\theta}| d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} R e^{-R^2 \sin(\theta)} d\theta$$

et montrer que cette quantité tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

4. Conclure.

Solution 8 1. En effectuant le changement de variable $u = x^2$, on obtient

$$\int_0^\infty |\sin(x^2)| dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{|\sin(u)|}{\sqrt{u}} du,$$

il suffit donc de montrer que la dernière intégrale est infinie. Il existe un intervalle $[a, b] \subset]0, \pi[$, avec $a < b$, pour lequel

$$|\sin u| \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour tout } u \in [a, b]$$

(c'est vrai avec $a = \frac{\pi}{6}$ et $b = \frac{5\pi}{6}$). Comme $u \mapsto |\sin(u)|$ est π -périodique, il s'ensuit que

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(u)|}{\sqrt{u}} du \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \int_{a+n\pi}^{b+n\pi} \frac{1}{\sqrt{u}} du \geq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \int_{a+n\pi}^{b+n\pi} \frac{1}{\sqrt{b+n\pi}} du = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{b-a}{\sqrt{b+n\pi}}.$$

et cette série est divergente par le critère de Riemann, puisque

$$\frac{1}{\sqrt{b+n\pi}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

2. Le tracé de γ_R est représenté sur la figure 1. La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est un ouvert

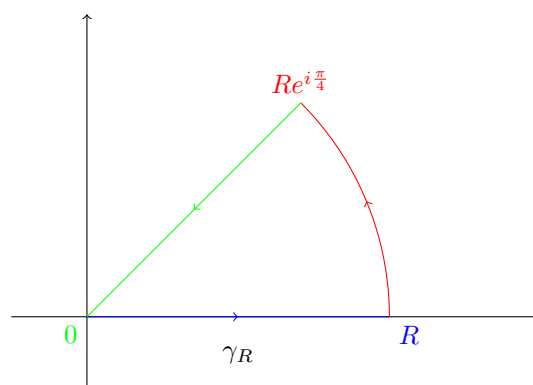


FIGURE 1 – Le lacet γ_R .

étoilé par rapport à 0. Comme γ_R est un contour fermé simple C^1 par morceaux, d'après le théorème de “Cauchy étoilé”, on a donc

$$\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

On peut paramétriser les différentes portions du lacet comme ceci :

- $\gamma_1 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$ (segment bleu),
- $\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto Re^{i\theta}$ (arc rouge), et
- $\gamma_3 : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (R-t)e^{i\pi/4}$ (segment vert).

L'égalité précédente se réécrit donc

$$\int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 e^{2i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta - \int_0^R e^{-i(R-t)^2} e^{i\pi/4} dt = 0$$

ce qui donne la relation demandée après changement de variable $x = R - t$ dans la troisième intégrale.

3. On a

$$\int_0^{\pi/4} |\exp(-R^2 e^{2i\theta}) R e^{i\theta} d\theta| = \int_0^{\pi/4} |e^{-R^2 \cos(2\theta)} e^{-iR^2 \sin(2\theta)}| R |e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos(2\theta)} d\theta.$$

En faisant le changement de variable $\theta = \pi/4 - \frac{\theta'}{2}$, on trouve alors

$$\int_0^{\pi/4} |\exp(-R^2 e^{2i\theta}) R e^{i\theta} d\theta| = \int_0^{\pi/2} R e^{-R^2 \cos(\pi/2 - \theta')} d\theta' = \int_0^{\pi/2} R e^{-R^2 \sin(\theta)} d\theta.$$

On peut maintenant utiliser l'inégalité $\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$ pour $\theta \in [0, \pi/2]$, ce qui donne

$$\int_0^{\pi/2} R e^{-R^2 \sin(\theta)} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} R e^{-\frac{2R^2 \theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{2R} \left[e^{-\frac{2R^2 \theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R^2})$$

qui tend bien vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$.

4. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ix^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-it^2} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-i\pi/4} \left(\int_0^R e^{-t^2} dt + \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 e^{2i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta \right) \\ &= e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

où la contribution due à l'arc de cercle rouge est 0 d'après la majoration de la question précédente. En prenant la partie imaginaire, on obtient

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 11. (Théorème de Liouville)

Soit f une fonction entière.

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ deux complexes distincts et $R > \max(|a|, |b|)$. Calculer

$$I(R) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

où C_R désigne le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique.

2. On suppose maintenant que f est bornée. Montrer alors que f est constante.

Solution 11 1. Comme $R > \sup(|a|, |b|)$, on a $C_R \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ donc l'intégrale est bien définie. De plus, en effectuant une décomposition en éléments simples, on obtient

$$I(R) = \frac{1}{a-b} \left(\int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-b} dz \right).$$

La fonction f est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}$ qui contient le disque fermé $\overline{\mathbb{D}_R(0)}$. Puisque $a, b \in \mathbb{D}_R(0)$ par hypothèse, on a d'après la "formule de Cauchy 6"

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad f(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z-b} dz$$

et donc $I(R) = 2\pi i \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

2. Si f est bornée, on a la majoration

$$|I(R)| \leq \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \cdot \frac{2\pi R}{(R - |a|)(R - |b|)}$$

donc $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$. On en déduit que $f(a) = f(b)$, et comme a et b étaient arbitraires, f est donc constante.

Exercice 16.

Soient f, g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U contenant le disque unité fermé.

1. On suppose que f et g ne s'annulent pas et vérifient $|f(z)| = |g(z)|$ pour tout z sur le cercle unité. Montrer qu'il existe un complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $f = \lambda g$.
2. Le résultat ci-dessus persiste-t-il si f et g peuvent s'annuler ?
3. On suppose que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne prend que des valeurs réelles sur le cercle unité. Montrer que h est constante.

Indication : On pourra considérer la fonction $f = e^{ih}$.

Solution 16 1. Considérons la fonction

$$h := \frac{f}{g}$$

holomorphe sur U . Son module prend la valeur constante 1 sur le bord du disque unité par hypothèse, et donc doit être majoré par 1 partout dans le disque unité d'après le principe du maximum.

Plus précisément, h est *continue* sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe sur $\mathbb{D}$. D'après le principe du maximum (3ème version), on a donc pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|h(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} |h(\zeta)| = \sup_{\zeta \in \partial \mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|}{|g(\zeta)|} = 1.$$

Ainsi, $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Mais en échangeant les rôles de f et g , on obtient aussi l'inégalité inverse, et donc $|f(z)| = |g(z)|$ sur $\mathbb{D}$ tout entier.

La fonction h est donc de module constant (égal à 1) sur $\mathbb{D}$, donc constante sur $\mathbb{D}$ (d'après un exercice du premier TD), puis sur U qui est connexe (d'après le principe d'unicité). Notons λ cette constante, qui est de module 1 ; nous avons donc $f = \lambda g$.

2. Le résultat n'est plus du tout vrai si f et g peuvent s'annuler : par exemple $f(z) = z$ et $g = 1$ fournissent un contre-exemple.
3. On pose $f(z) = e^{ih(z)}$ et $g(z) = 1$, et on applique la question 1, pour déduire qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tel que

$$e^{ih(z)} = e^{i\theta}, \quad \text{pour tout } z \in U.$$

Pour tout $z \in U$, il existe donc un entier $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $h(z) = \theta + 2\pi k(z)$. La fonction $z \mapsto k(z)$ est par ailleurs continue (et même, holomorphe !), puisque, par définition,

$$k(z) = \frac{h(z) - \theta}{2\pi}.$$

Comme U est connexe, k est donc constante, et donc h aussi.

Exercice 18. (Lemme de Schwarz)

Dans cet exercice, on se propose de démontrer le lemme de Schwarz :

Lemme 1. (Lemme de Schwarz)

Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 0$. Alors

- (i) $|f'(0)| \leq 1$, et
- (ii) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

De plus, à moins que $f(z) = \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1, les égalités précédentes sont strictes.

1. Soit f comme dans l'énoncé. Justifier qu'il existe une fonction g holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que

$$f(z) = zg(z).$$

2. En appliquant le principe du maximum à g , démontrer l'inégalité $|f(z)| \leq |z|$ pour $|z| \in \mathbb{D}$.
 3. Démontrer que $|f'(0)| \leq 1$.
 4. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z)| = |z|$. Montrer qu'alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ avec $|\lambda| = 1$.
 5. Même question en supposant que $|f'(0)| = 1$ au lieu de $|f(z)| = |z|$ pour un certain $z \in \mathbb{D}$.

Solution 18

On note $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}$ le disque ouvert centré en 0 de rayon r et C_r sont cercle-bord.

1. Puisque f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, elle admet le développement en série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

donc le rayon de convergence est au moins 1 (on a convergence sur le plus grand disque contenu dans le domaine!). La fonction

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-1}$$

est donc holomorphe sur $\mathbb{D}$ (comme somme d'une série entière sur son disque de convergence) et vérifie

$$f(z) = zg(z).$$

Notons qu'on a de plus $g(0) = f'(0)$ par définition de g .

2. Soit $r \in]0, 1[$ et soit

$$M(r) := \max_{z \in \overline{\mathbb{D}_r}} |g(z)|.$$

D'après le principe du maximum (3ème version), le maximum de g sur $\overline{\mathbb{D}_r}$ est atteint au bord : il existe z_r de module r tel que

$$M(r) = |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} = \frac{|f(z_r)|}{r} < \frac{1}{r}$$

par hypothèse sur f . En particulier, pour tout $z \in \mathbb{D}$ et pour tout $r \in]|z|, 1[$,

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

On obtient donc $|g(z)| \leq 1$ par passage à la limite $r \rightarrow 1^-$. Ainsi, $\sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| \leq 1$, donc pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|f(z)| = |z||g(z)| \leq |z|.$$

3. On a vu que $|g| \leq 1$ à la question précédente ; en particulier,

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1.$$

4. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ non nul tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. On a alors $|g(z_0)| = 1$, mais d'après la question 2 et par continuité en 0, on a aussi $|g(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Par le principe du maximum (première version), g est donc constante sur le disque unité, constante que l'on peut noter λ , et qui doit être de module 1 puisque $|g(z_0)| = 1$. Ainsi, $f(z) = zg(z) = \lambda z$.
 5. Comme $f'(0) = g(0)$, on conclut par le même raisonnement que la question précédente.

Exercice 21.

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. On appelle diamètre de f la quantité

$$d = \sup_{w, z \in \mathbb{D}} |f(z) - f(w)|$$

éventuellement infinie.

1. Démontrer que $2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2} dw$, pour $r \in (0, 1)$.
2. En déduire que $2|f'(0)| \leq d$.

Solution 21 1. D'après la formule de Cauchy,

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^2} dw.$$

En appliquant la même formule à la fonction $z \mapsto -f(-z)$,

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{-f(-w)}{w^2} dw.$$

La conclusion est obtenue en ajoutant ces deux relations.

2. On obtient immédiatement

$$2|f'(0)| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{d}{r^2} = \frac{d}{r}$$

et on conclut par passage à la limite $r \rightarrow 1^-$.

Exercice 22.

Soient U un ouvert connexe de $\mathcal{C}$ et f une fonction holomorphe sur U telle que la suite $f_n = f^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de U . Que peut-on dire de sa limite g ?

Solution 22

La limite g est holomorphe comme limite uniforme sur tous compacts d'une fonction holomorphe, d'après le théorème de "Cauchy 10" (conséquence du théorème de Morera). D'autre part, la suite des f'_n converge vers g' également uniformément sur tout compact ("Cauchy 11"). Mais comme $f'_n = f_{n+1}$, on en déduit que $g' = g$, donc que $g = g(0) \exp(z)$.