

TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 4 Exercices II. 17, 24, 25

Exercice. (Théorème de prolongement de Riemann)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On dit que f admet une singularité effaçable en a si f se prolonge au voisinage de a en une fonction holomorphe. Le théorème de prolongement de Riemann affirme que f a une singularité effaçable en a si et seulement si

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0. \quad (1)$$

1. On suppose que f vérifie la condition (1). Montrer que la fonction

$$g : z \mapsto \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est holomorphe sur Ω . Que vaut $g'(a)$?

2. En déduire une démonstration du théorème de prolongement de Riemann.
3. Soit I un ensemble et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts indexés par I . Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions vérifiant (i) $h_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ pour tout $i \in I$, et (ii) $h_i = h_j$ sur $\Omega_i \cap \Omega_j$. Montrer qu'il existe h une fonction holomorphe sur $\Omega := \cup_{i \in I} \Omega_i$ vérifiant $h|_{\Omega_i} = h_i$ pour tout $i \in I$.
4. En déduire l'application suivante : soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soient $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifiant $|f| \leq |g|$. Alors il existe une fonction holomorphe $\lambda \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f = \lambda g$.

Solution 1. La fonction g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$ puisqu'elle coïncide avec f sur cet ouvert; il reste à montrer que g est dérivable au sens complexe en a . Or,

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)^2 f(z) - 0}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0,$$

donc g est holomorphe sur Ω et $g'(a) = 0$.

2. Comme g est holomorphe, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(a) \subset \Omega$ et le développement en série entière

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad (2)$$

possède un rayon de convergence au moins r . Puisque $g(a) = g'(a) = 0$, on peut écrire

$$g(z) = (z - a)^2 h(z)$$

où $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+2)}(a)}{(n+2)!} (z - a)^n$ est holomorphe sur $\mathbb{D}_r(a)$ comme somme d'une série entière de rayon de même rayon de convergence que (2) – donc au moins r . On a donc d'une part $g(z) = (z - a)^2 f(z)$ pour $z \in \Omega \setminus \{a\}$ (par définition de g) mais aussi $g(z) = (z - a)^2 h(z)$ pour $z \in \mathbb{D}_r(a)$ (par définition de h), d'où $h(z) = f(z)$ pour $z \in \mathbb{D}_r(a) \setminus \{a\}$: h est donc bien une fonction holomorphe qui étend f au voisinage de a .

3. Il faut d'abord donner une définition soignée d'une telle fonction h , avant de vérifier qu'elle est effectivement holomorphe.

Pour tout $z \in \Omega$, l'hypothèse (ii) assure qu'il existe un unique w_z tel que

$$\forall i \in I, \quad z \in \Omega_i \implies h_i(z) = w_z.$$

On peut alors définir une fonction $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ par $h(z) := w_z$.¹

Cette fonction est alors holomorphe puisqu'elle coïncide au voisinage de chaque point avec l'une des fonctions h_i qui est holomorphe d'après (i). En effet, soit $z \in \Omega$, et soit $i \in I$ tel que $z \in \Omega_i$. Comme Ω_i est ouvert, il existe $V \subset \Omega_i$ voisinage de z dans Ω_i (et donc dans Ω). On a alors par construction $h(z) = h_i(z)$ pour tout $z \in V$. Or h_i est holomorphe, donc f est holomorphe en z .

4. Si g est identiquement nulle, alors f aussi (puisque $|f| \leq |g|$) et la fonction $\lambda \equiv 1$ convient. Dans le cas contraire, considérons $Z_g := g^{-1}(\{0\})$ l'ensemble des points d'annulation de g . L'idée est que la fonction

$$\tilde{\lambda} : \Omega \setminus Z_g \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

est holomorphe sur $\Omega \setminus Z_g$. De plus, comme elle vérifie $|\tilde{\lambda}| \leq 1$ par hypothèse, ses singularités en les zéros de g sont toutes effaçables. On couvrant Ω par (i) l'ouvert $\Omega \setminus Z_g$ et (ii) des voisinages suffisamment petits de chaque zéro de g , on va alors pouvoir "recoller" ensemble les différents prolongements locaux et obtenir un prolongement global $\tilde{\lambda}$ sur Ω .

Plus précisément : d'après le principe des zéros isolés, pour chaque $a \in Z_g$, il existe un ouvert $U_a \subset \Omega$ tel que $U_a \cap Z_g = \{a\}$. La fonction $\tilde{\lambda}$ est donc holomorphe sur $U_a \setminus \{a\}$. De plus, comme $|\tilde{\lambda}| \leq 1$, on a $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)\tilde{\lambda}(z) = 0$. D'après la question 2, il existe donc $V_a \subset U_a$ un voisinage de a et $\tilde{\lambda}_a : V_a \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe prolongeant $\tilde{\lambda}$ sur V_a . On écrit alors

$$\Omega = (\Omega \setminus Z_g) \cup \bigcup_{a \in Z_g} V_a$$

et on considère les fonctions holomorphes

$$\tilde{\lambda} : \Omega \setminus Z_g \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \tilde{\lambda}_a : V_a \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ces fonctions vérifient la condition (ii) de la question 3. En effet, les intersections $V_a \cap V_b$ sont vides pour $a \neq b$. D'autre part, $\tilde{\lambda}_a = \tilde{\lambda}$ sur $V_a \cap (\Omega \setminus Z_g)$. D'après la question 3, il existe donc une fonction holomorphe $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui prolonge sur Ω toutes les fonctions précédentes. Il reste à vérifier que $f = \lambda g$. Soit $z \in \Omega$. Si $g(z) = 0$, alors $f(z) = 0$ (car $|f| \leq |g|$), et donc $f(z) = \lambda(z)g(z)$. Sinon, on a $\lambda(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ (puisque λ étend $\tilde{\lambda}$), et donc $f(z) = \lambda(z)g(z)$.

Exercice 17.

Dans cet exercice, Ω désigne un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et g une fonction holomorphe sur Ω non identiquement nulle. On se propose de décrire l'ensemble des solutions de l'équation

$$\sum_{j=1}^m |f_j| = |g| \quad \text{sur } \Omega, \quad (3)$$

où les inconnues $f_1, \dots, f_m$ sont des fonctions holomorphes sur Ω . Dans la suite, on suppose données des fonctions $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifiant (3).

1. Montrer que pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe une fonction $u_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f_j = u_j g$.
2. Montrer que les u_j ainsi obtenues vérifient $\sum_{j=1}^m |u_j| = 1$ sur Ω .
3. Soit $z_0 \in \Omega$. Exhiber des nombres complexes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ de module 1 tels que $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j(z_0) = 1$.
4. Montrer que l'on a alors l'égalité

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j(z) = 1$$

pour tout $z \in \Omega$.

1. Digression axiomatique ensembliste : on peut avoir la sensation d'utiliser l'axiome du choix pour définir h (ce qui en soi ne serait pas un crime...). En effet, pour tout $z \in \Omega$, l'ensemble $I_z := \{i \in I : z \in \Omega_i\}$ est non-vide, donc l'axiome du choix autorise à fixer un élément i du produit cartésien $X = \prod_{z \in \Omega} I_z$. On peut alors poser $h(z) := h_{i(z)}(z)$.

Mais en réalité, l'axiome du choix n'est pas nécessaire. Pour l'éviter, il faut plutôt choisir h comme (l'unique) élément du produit cartésien infini $\prod_{z \in \Omega} V_z$ où $V_z = \{f_i(z) \mid i \in I \text{ tel que } z \in \Omega_i\}$, l'ensembles des valeurs prises par les f_i en z . Le point clé est que V_z est un singleton pour chaque z d'après (ii), et il s'avère qu'il n'y a pas besoin de l'axiome du choix pour choisir parmi une infinité de singletons (en effet, on peut définir $f := \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C} \mid w \in V_z\}$, qui est bien un ensemble d'après l'axiome de la paire et l'axiome de spécification. Comme pour chaque $z \in \Omega$, il existe un unique $w \in \mathbb{C}$ tel que $(z, w) \in f$, cet ensemble est bien identifiable à une fonction).

5. Montrer que si $\xi_1, \dots, \xi_m$ sont des nombres complexes vérifiant $\sum_{j=1}^m |\xi_j| = \sum_{j=1}^m \xi_j$ alors nécessairement, $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\xi_j \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$.
6. Conclure.

Solution 17 1. Soit $j \in \{1, \dots, m\}$. Alors

$$|f_j| \leq \sum_{k=1}^m |f_k| = |g|$$

donc d'après l'exercice précédent, préparé justement pour cette question, il existe $u_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f_j = u_j g$.

2. Pour tout $z \in \Omega$, on a

$$|g| = \sum_{j=1}^m |f_j| = |g| \left(\sum_{j=1}^m |u_j| \right).$$

On a donc l'égalité demandée sur $\Omega \setminus \{g^{-1}(\{0\})\}$, et l'égalité s'ensuit sur Ω par continuité des u_j , puisque les zéros de g (qui est supposée non-nulle) sont isolés.

3. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, posons.

$$\varepsilon_j := \begin{cases} 1 & \text{si } u_j(z_0) = 0 \\ \frac{u_j(z_0)}{|u_j(z_0)|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a bien $|\varepsilon_j| = 1$. De plus $\varepsilon_j u_j(z_0) = |u_j(z_0)|$ donc

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j(z_0) = \sum_{j=1}^m |u_j(z_0)| = 1$$

d'après la question précédente.

4. Notons $F := \sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j$. C'est une fonction holomorphe sur Ω et elle vérifie d'une part

$$|F| \leq \sum_{j=1}^m |\varepsilon_j| |u_j| \leq \sum_{j=1}^m |u_j| = 1$$

sur Ω , et d'autre part, $F(z_0) = 1$ d'après la question précédente. Le principe du maximum (première version) assure donc que $F = 1$ sur Ω (puisque'il est connexe).

5. On le démontre par récurrence sur m . Le cas $m = 1$ est immédiat. D'autre part, supposons que

$$\sum_{j=1}^{m+1} |\xi_j| = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j.$$

Notons $A := \sum_{j=1}^m \xi_j$ et $B = \xi_{m+1}$. Si $B = 0$, on conclut immédiatement par récurrence. Supposons donc que $B \neq 0$. Par hypothèse, $C := A + B$ est un réel strictement positif puisque $C = \sum_{j=1}^{m+1} |\xi_j|$ et $|\xi_{m+1}| = |B| > 0$. De plus, en appliquant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence,

$$C \leq |C| = |A + B| \leq |A| + |B| \leq \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j| \right) + |\xi_{m+1}| = \sum_{j=1}^{m+1} |\xi_j| = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j = C.$$

Toutes les inégalités précédentes sont donc des égalités, en particulier

$$|A + B| = |A| + |B|,$$

soit un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, impliquant (comme $B \neq 0$) que $A = \lambda B$ pour un réel $\lambda \geq 0$. Ainsi, $0 < C = A + B = (\lambda + 1)B$ et donc $B > 0$. Ceci combiné à l'égalité $\sum_{j=1}^{m+1} |\xi_j| = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j$, donne

$$\sum_{j=1}^{m+1} |\xi_j| - |B| = \sum_{j=1}^{m+1} \xi_j - B \implies \sum_{j=1}^m |\xi_j| = \sum_{j=1}^m \xi_j.$$

et la conclusion s'ensuit par récurrence.

6. Soit $z \in \Omega$. D'après les questions 2 et 3, on a

$$\sum_{j=1}^m |\varepsilon_j u_j(z)| = \sum_{j=1}^m |\varepsilon_j| |u_j(z)| = \sum_{j=1}^m |u_j(z)| = 1 = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j(z).$$

La question précédente appliquée avec $\xi_j = \varepsilon_j u_j(z)$, permet de conclure que

$$\varepsilon_j u_j(z) \geq 0 \quad \text{pour tout } z \in \Omega \text{ et } j \in \{1, \dots, m\}.$$

La fonction holomorphe $\varepsilon_j u_j$ est donc de partie imaginaire nulle sur Ω , elle est donc nécessairement constante d'après les équations de Cauchy-Riemann (puisque Ω est connexe). En notant $\lambda_j := \varepsilon_j u_j$ cette constante, on a alors $f_j = u_j g = \frac{\lambda_j}{\varepsilon_j} g = \lambda'_j g$ où $\lambda'_j := \frac{\lambda_j}{\varepsilon_j}$. L'ensemble des solutions de l'équation

$$\sum_{j=1}^m |f_j| = |g|$$

est donc donné par

$$\{(\lambda_1 g, \dots, \lambda_m g) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m \text{ tels que } |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m| = 1.\}$$

Exercice 24.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que

- (i) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une limite f
- (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n ne s'annule pas sur Ω

Démontrer qu'on a alors les deux possibilités suivantes : soit f est nulle, soit f ne s'annule jamais sur Ω .

Solution 24

On suppose que f est non-identiquement nulle, et on montre qu'elle ne s'annule jamais. L'idée est la suivante : pour tout point $a \in \Omega$, on trouve un petit cercle $C_r(a)$ centré en a sur lequel $|f|$ ne s'annule pas (par continuité si $f(a) \neq 0$, et en utilisant le principe des zéros isolés sinon, puisque f est holomorphe d'après le théorème de "Cauchy 10"). La fonction continue $|f|$ atteint donc un minimum $m > 0$ sur ce compact, et donc pour n assez grand, $|f_n|$ est minorée par $\frac{m}{2}$ sur ce même cercle (puisque f_n converge uniformément vers f sur $C_r(a)$). Le principe du maximum (3ème version) appliqué à la fonction $\frac{1}{f_n}$ (qui est holomorphe puisque f_n ne s'annule pas) implique alors que $\frac{1}{|f_n(z)|} \leq \frac{2}{m}$ pour tout z dans le disque $\mathbb{D}_r(a)$. En prenant $z = a$, on en déduit pour n assez grand que $|f_n(a)| \geq \frac{m}{2}$, puis par passage à la limite, $|f(a)| \geq \frac{m}{2}$. Ceci montre que $f(a) \neq 0$.

À retenir de cet exercice :

- Quand une fonction holomorphe f ne s'annule pas, il est souvent utile de considérer $\frac{1}{f}$.
- Quand on s'intéresse à la convergence uniforme de fonctions holomorphes, il est utile de considérer les valeurs des fonctions sur un contour (que ce soit pour appliquer le principe du maximum ou une formule de Cauchy). C'est l'idée centrale pour démontrer le théorème de "Cauchy 10" à partir du théorème de Morera !

Exercice 25. (Version faible du Théorème de Montel)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes uniformément bornée sur Ω , c'est-à-dire vérifiant

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z)| < \infty.$$

On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f . Démontrer que f est holomorphe.

Indication : utiliser le théorème de convergence dominée.

Solution 25

L'astuce est que l'on transforme la convergence simple en convergence uniforme en passant par le théorème de convergence dominée. En effet, soit $a \in \Omega$ quelconque et $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(a) \subset \Omega$. Soit $z \in \overline{\mathbb{D}_{r/2}(a)}$. Alors d'après la formule de Cauchy,

$$f_n(z) - f(z) = \int_{C_r(a)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En paramétrisant l'intégrale, ceci se réécrit

$$f_n(z) - f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{f_n(a + re^{i\theta}) - f(a + re^{i\theta})}{a + re^{i\theta} - z} \cdot ire^{i\theta} d\theta$$

ce que l'on peut majorer par

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &\leq \frac{r}{r/2} \int_0^{2\pi} |f_n(a + re^{i\theta}) - f(a + re^{i\theta})| d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |f_n(a + re^{i\theta}) - f(a + re^{i\theta})| d\theta \end{aligned}$$

en utilisant que $|a + re^{i\theta} - z| \geq |r - |a - z|| = \frac{r}{2}$. Comme le second membre a le mérite de ne plus dépendre de z – ainsi que votre perspicacité l'a exigé – on obtient donc

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_{r/2}(a)} |f_n(z) - f(z)| \leq 2 \int_0^{2\pi} |f_n(a + re^{i\theta}) - f(a + re^{i\theta})| d\theta$$

et on va voir grâce au théorème de convergence dominée que la quantité au second membre converge vers 0 pour $n \rightarrow \infty$. En effet, l'intégrande converge simplement vers 0 par hypothèse, et de plus, en remarquant que $|f(z)| \leq M$ pour tout z (par passage à la limite à la limite $n \rightarrow \infty$ dans les inégalités $|f_n(z)| \leq M$) on a la domination facile par la fonction constante

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z)| + |f(z)| \leq 2M$$

intégrable sur $[0, 2\pi]$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \mathbb{D}_r(a)} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

On a donc convergence uniforme des f_n vers f sur le compact $\overline{\mathbb{D}_{r/2}(a)}$, et donc f est holomorphe par le théorème de "Cauchy 10". Pas besoin de recouvrir un compact par des boules, comme l'un de vous l'a fort justement remarqué, correction amendée en conséquence – néanmoins, il est facile de vérifier à partir d'ici, si on le souhaite, que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f sur tout compact.

Exercice. (Principe de réflexion de Schwarz pour le disque unité)

Dans cet exercice, on note $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ le disque unité, $\mathbb{D}_R = \{|z| < R\}$ le disque centré en 0 et de rayon R . On considère une fonction $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, holomorphe en tout point de $\mathbb{D}$, et telle que $|f(z)| = 1$ pour $|z| = 1$. Le but est de montrer que f admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{D}_R$ pour un certain $R > 0$.

1. Montrer que si l'on ne suppose pas que $|f| = 1$ sur $\partial\mathbb{D}$, alors le résultat n'est pas vrai. Montrer également qu'il existe une fonction f vérifiant les hypothèses qui ne peut pas être prolongée holomorphiquement à $\mathbb{C}$ tout entier (autrement dit, le résultat n'est vrai que pour $R > 1$ suffisamment proche de 1 en général).

Indication : pour la deuxième partie de la question, on pourra considérer

$$f(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}$$

pour $\alpha \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

2. Vérifier que l'application $w : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par

$$w(z) := \overline{z}^{-1} = \frac{z}{|z|^2}$$

est une involution anti-holomorphe qui fixe le cercle $\partial\mathbb{D}$ et envoie $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}_r$ sur $\overline{\mathbb{D}_R} \setminus \mathbb{D}$ pour tout $r \in (0, 1)$ et $R = 1/r$.

3. Démontrer qu'il existe $R > 1$ tel que la fonction

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| \leq 1 \\ w \circ f \circ w(z) & \text{si } 1 < |z| < R, \end{cases}$$

soit bien définie sur $\overline{\mathbb{D}_R}$ et holomorphe sur $\mathbb{D} \cup (\mathbb{D}_R \setminus \overline{\mathbb{D}})$.

4. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ assez petit tel que

$$||z| - 1| \leq \delta \implies |g(z) - g(w(z))| \leq \varepsilon.$$

5. En déduire que g est continue sur $\overline{\mathbb{D}_R}$.

6. Soit $a \neq -1$ un point de $\partial\mathbb{D}$. Montrer qu'il existe un voisinage U de a tel que l'application $\Phi : z \mapsto \frac{i(1-z)}{1+z}$ établisse une bijection de U sur $\Phi(U)$. Montrer que $V := \Phi(U)$ est ouvert, et que la bijection réciproque $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ est également holomorphe. Montrer que

$$\Phi(U \cap \mathbb{D}) = \Phi(U) \cap \mathbb{H}^+, \quad \Phi(U \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})) = \Phi(U) \cap \mathbb{H}^-, \quad \Phi(U \cap \partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cap \Phi(U),$$

où $\mathbb{H}^\pm = \{\pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (faire un dessin!).

7. Démontrer que g est holomorphe sur $\mathbb{D}_R$.

Indication : considérer $g \circ \Phi^{-1}$ au voisinage de $\Phi(a)$, avec $a \in \partial\mathbb{D}$.

Solution 1. On prend $f = z^{1/2} = e^{\operatorname{Log}(z)}$ pour $z \neq 0$ et $f(0) = 0$. Cette fonction est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, holomorphe sur $\mathbb{D}$ (puisque $\mathbb{D} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$), mais n'admet pas de prolongement holomorphe en 0 puisqu'elle n'est pas dérivable en 0 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = \sqrt{n} \rightarrow \infty \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

La fonction proposée est holomorphe sur $\mathbb{D}_R$ avec $R = |\alpha|^{-1} > 1$, et vérifie

$$|f(z)| = \frac{|z| |1 - \alpha \frac{\bar{z}}{|z|^2}|}{|1 - \bar{\alpha}z|}$$

donc pour $|z| = 1$, $|f(z)| = \frac{|1 - \alpha \bar{z}|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = 1$. Cette fonction vérifie donc bien les hypothèses mais n'admet pas d'extension holomorphe sur $\mathbb{D}_R$ pour $R > |\alpha|^{-1}$, puisqu'elle n'est pas bornée en $z = 2$.

2. C'est une involution (comme composée des deux involutions $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto z^{-1}$), et pour $z = re^{i\theta}$, on a $w(z) = \frac{1}{r}e^{i\theta}$, donc w établit une bijection de $\partial\mathbb{D}_r$ sur $\partial\mathbb{D}_{1/r}$ pour tout $r > 0$. Pour tout $r > 0$, elle est donc bijective de $\{r \leq |z| \leq 1\}$ dans $\{1 \leq |z| \leq R\}$ où $R = 1/r$. Pour $z \in \partial\mathbb{D}$, on a

$$w(z) = \frac{z}{|z|^2} = \bar{z}.$$

Enfin, c'est la composée d'une fonction holomorphe $w_1 : z \mapsto \frac{1}{z}$ et d'une fonction anti-holomorphe $w_2 : z \mapsto \bar{z}$ sur $\mathbb{C}^*$, donc elle est anti-holomorphe, comme on peut le vérifier en utilisant la règle de la chaîne pour les dérivées holomorphes (voir exercice 17 de la page 56 du polycopié de cours)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_1}{\partial z} \overbrace{\frac{\partial w_2}{\partial z}}^{=0} + \underbrace{\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}}_{=0} \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial z} = 0$$

3. Par continuité, on peut trouver $R > 1$ assez petit pour que $g|_{\overline{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/R}}}$ ne s'annule pas et le résultat découle de la question précédente.
4. On remarque que pour $|z| < 1$,

$$\frac{g(z)}{g(w(z))} = \frac{f(z)}{w \circ f \circ w(z)} = \frac{f(z)}{w \circ f(z)} = |f(z)|^2 \rightarrow 1$$

quand $|z| \rightarrow 1$. De même, pour $|z| > 1$,

$$\frac{g(z)}{g(w(z))} = \frac{w \circ f \circ w(z)}{f \circ w(z)} = \frac{1}{|f(w(z))|^2} \rightarrow 1$$

quand $|z| \rightarrow 1$.

5. Il suffit de montrer la continuité sur $\partial\mathbb{D}$. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité, donc continuité uniforme de f sur $\overline{\mathbb{D}}$ et de $f \circ w$ sur $\overline{\mathbb{D}_R} \setminus \mathbb{D}$ assurent l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall z, z' \in \overline{\mathbb{D}}, \quad |z - z'| \leq \delta \implies |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon,$$

et

$$\forall z, z' \in \overline{\mathbb{D}_2} \setminus \mathbb{D}, \quad |z - z'| \leq \delta \implies |f \circ w(z) - f \circ w(z')| \leq \varepsilon.$$

Quitte à rétrécir δ , on peut aussi supposer que

$$||z| - 1| \leq \delta \implies |g(z) - g(w(z))| \leq \varepsilon$$

d'après la question précédente. Soit $a \in \partial\mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| \leq \delta$. Observons qu'alors $||z| - 1| \leq |z - a| \leq \delta$. Si $z \in \overline{\mathbb{D}}$, on a $|g(z) - g(a)| = |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon$. Sinon, on écrit

$$|g(z) - g(a)| = |g(z) - g \circ w(z)| + |f \circ w(z) - f \circ w(a)| \leq 2\varepsilon.$$

puisque $g(w(z)) = f \circ w(z)$ pour $|z| > 1$ et $w(a) = a$.

6. On trouve la bijection réciproque

$$\Phi^{-1}(w) = \frac{i - w}{i + w}$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Comme $\Phi(z) \in \mathbb{R}$, Φ est continue en z , on a un voisinage U de z tel que $-i \notin \Phi(U)$, et donc Φ définit un homéomorphisme de U sur son image. En particulier, $V = \Phi(U)$ est ouvert, comme image réciproque de l'ouvert U par Φ^{-1} . La bijection réciproque est holomorphe comme on le voit sur son expression. Pour les égalités, puisque Φ est bijective et que

$$\mathbb{C} = \mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^- \cup \mathbb{R},$$

il suffit de montrer les inclusions

$$\Phi(U \cap \mathbb{D}) \subset \Phi(U) \cap \mathbb{H}^+, \quad \Phi(U \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})) \subset \Phi(U) \cap \mathbb{H}^-, \quad \Phi(U \cap \partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{R} \cap \Phi(U),$$

qui sont immédiates en écrivant

$$\text{signe Im}(\Phi(z)) = \text{signe}(\text{Re}((1 - z)(1 + \bar{z}))) = \text{signe}(1 - |z|^2).$$

7. Soit $a \in \partial\mathbb{D}$ avec $a \neq -1$, et soit U un ouvert contenant a , ne contenant pas -1 , et tel que $\overline{U} \subset \mathbb{D}_R$. La restriction de g à U est continue et holomorphe sur $U_{\text{int}} \cup U_{\text{ext}}$ où

$$U_{\text{int}} := U \cap \mathbb{D}, \quad U_{\text{ext}} := U \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$$

Par composition, la fonction

$$z \mapsto g \circ \Phi^{-1}(z)$$

est continue sur $\Phi(U)$, et d'après la question précédente, elle est holomorphe sur $\Phi(U) \cap \mathbb{H}^+$ et $\Phi(U) \cap \mathbb{H}^-$. D'après le théorème de Morera, elle est donc holomorphe sur $\Phi(U)$ (reproduire la preuve du principe de réflexion de Schwartz). Comme Φ est holomorphe sur U la fonction

$$g(z) = (g \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi$$

est holomorphe sur U par composition. Ceci montre que g est holomorphe en a . Il reste à montrer que g est holomorphe en -1 , mais pour cela, il suffit d'appliquer les arguments précédents à $z \mapsto g(-z)$ pour voir qu'elle est holomorphe en $z = 1$.