

TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 5

Exercices III. 8, 11, 13 – IV. 1, 3, 5

1 Chapitre 3

Exercice 8. (Logarithme et puissances fractionnaires d'une fonction holomorphe)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe ne s'annulant pas.

1. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}$$

pour tout lacet fermé γ tracé dans U . On considèrera la fonction

$$\lambda : t \mapsto \frac{\exp \left(\int_{\gamma_t} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right)}{f(\gamma(t))}$$

où $\gamma_t = \gamma|_{[0,t]}$.

2. On dit qu'une fonction holomorphe $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ est un *logarithme holomorphe de f* si elle vérifie $f = \exp \circ g$. Montrer que f admet un logarithme holomorphe si, et seulement si, pour tout lacet γ tracé dans U ,

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

3. Soit $k \geq 2$. On suppose qu'il existe une *racine k -ième holomorphe de f* , c'est-à-dire, une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = h(z)^k$ pour tout $z \in U$. Montrer que si f admet une racine k -ième holomorphe, alors pour tout lacet γ tracé dans U ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in k\mathbb{Z}. \quad (1)$$

4. On suppose que f vérifie la propriété (1) pour un entier $k \geq 2$.

(a) Soit $z_0 \in U$. Montrer que pour tout $z \in U$, la quantité $H(z) = \exp \left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_z} \frac{f'}{f} \right)$ ne dépend pas du choix du chemin γ_z joignant z à z_0 .

(b) En déduire que f admet une racine k -ième holomorphe $h : U \rightarrow \mathbb{C}$.

5. (a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle qu'on ait l'égalité $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{h(z)}{z}$ pour tout $0 < |z| < 1$. Que vaut $h(0)$?

(b) La fonction $f : z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow e^z - 1 \in \mathbb{C}$ admet-elle un logarithme holomorphe ?

6. Soit $k \geq 2$. À quelle condition sur l'entier relatif $p \in \mathbb{Z}$ la fonction $z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^p$ admet-elle une racine k -ième holomorphe ?

Solution 8 1. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ un lacet fermé, d'abord supposé de classe C^1 . Par définition,

$$\lambda(t) = \frac{\exp \left(\int_0^t \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \right)}{f(\gamma(t))}$$

et d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\frac{d}{dt} \exp \left(\int_0^t \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))} \gamma'(s) ds \right) = \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \exp \left(\int_0^t \frac{f'(\gamma(s))}{f(\gamma(s))} \gamma'(s) dt \right).$$

En utilisant cette propriété, on vérifie que $\lambda'(t) = 0$. Si le lacet est C^1 par morceaux, on peut utiliser une subdivision et utiliser la même méthode. On en déduit que $\lambda(0) = \lambda(1)$, i.e.

$$\frac{\exp(0)}{f(\gamma(0))} = \frac{\exp \left(\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right)}{f(\gamma(1))} \implies \exp \left(\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) = \frac{f(\gamma(1))}{f(\gamma(0))} = 1$$

puisque $\gamma(0) = \gamma(1)$ par définition d'un lacet fermé.

2. Si f admet un logarithme g , alors

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma \frac{g'(z)e^{g(z)}}{e^{g(z)}} = \int_\gamma g'(z) = g(\gamma(1)) - g(\gamma(0)) = 0.$$

Réciproquement, supposons qu'on ait la propriété

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0. \quad (2)$$

pour tout lacet fermé γ tracé dans U . Fixons un point z_0 arbitraire dans U , et pour tout $z \in U$, définissons la fonction

$$X(z) := \int_{\gamma_z} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

où $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow U$ est un chemin tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z$ (un tel chemin existe car U est ouvert et connexe, donc connexe par arc). La condition (2) implique que la valeur de $X(z)$ ne dépend pas du chemin γ_z de z_0 à z . En effet, si γ_z^1 et γ_z^2 sont deux tels chemins, alors la concaténation de $\gamma := \gamma_z^1 \cdot \gamma_z^2$ (où γ_z^2 désigne le même chemin parcouru dans le sens inverse) définit un lacet fermé dans U , et donc d'après (2),

$$0 = \int_{\gamma_z^1 \cdot \gamma_z^2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma_z^1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\gamma_z^2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Montrons à présent que X est holomorphe sur U . Soit $z \in U$, et soit $r > 0$ tel que $\mathbb{D}_r(z) \subset U$. Pour tout $h \in \mathbb{D}_r(0)$, on peut écrire

$$\frac{X(z+h) - X(z)}{h} = \int_{\gamma_{z+h}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

où γ_{z+h} et γ_z sont des chemins arbitraires dans U allant de z_0 à $z+h$ et z , respectivement. Considérons alors le chemin $\gamma := \gamma_{z+h} \cdot \gamma_{[z+h, z]} \cdot \overline{\gamma_z}$, où $\gamma_{[z, z+h]}$ désigne le segment orienté de z à $z+h$. Ceci définit un lacet fermé tracé dans U , donc d'après la condition (2),

$$\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0 \implies \int_{\gamma_{z+h}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \int_{\gamma_{[z+h, z]}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 0.$$

On en déduit que

$$X(z+h) - X(z) = \int_{\gamma_{[z, z+h]}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

La fonction $\frac{f'}{f}$ étant holomorphe, donc continue sur U , il existe une fonction-reste ε vérifiant $\frac{f'}{f}(\zeta) = \frac{f'}{f}(z) + \varepsilon(\zeta)$ avec $\lim_{\zeta \rightarrow z} \varepsilon(\zeta) = 0$. Comme $\int_{\gamma_{[z, z+h]}} \frac{f'}{f}(z) d\zeta = \frac{f'}{f}(z) \int_{\gamma_{[z, z+h]}} d\zeta = h \frac{f'}{f}(z)$, on en déduit que

$$\left| \frac{X(z+h) - X(z)}{h} - \frac{f'}{f}(z) \right| \leq |\gamma_{[z, z+h]}| \cdot \sup_{\zeta \in D(z, |h|)} |\varepsilon(\zeta)| \rightarrow 0$$

lorsque $h \rightarrow 0$. Ceci montre que X est holomorphe sur U de dérivée $\frac{f'}{f}$.

Finalement, soit $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $e^{w_0} = f(z_0)$ – un tel nombre complexe existe puisque $f(z_0) \neq 0$ et $\exp$ est surjective sur $\mathbb{C}^*$. Alors la fonction

$$g(z) := X(z) + w_0$$

est un logarithme holomorphe de f . Pour le voir, il suffit d'observer que la fonction $\frac{e^g}{f}$ vaut 1 au point $z = z_0$ (par construction de w_0) et est constante puisque

$$\left(\frac{e^g}{f}\right)'(z) = \frac{g'(z)e^{g(z)}f(z) - f'(z)e^{g(z)}}{f(z)^2} = 0$$

et U est connexe par hypothèse.

3. Soit h une racine k -ième holomorphe de f . Alors $f(z) = h(z)^k$, donc pour tout lacet fermé γ tracé dans U ,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{kh'(z)h(z)^{k-1}}{h(z)^k} dz = k \cdot \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz \right)$$

et le terme entre parenthèses est un élément de $\mathbb{Z}$ d'après la question 1.

4. (a) Comme dans la question 2, on introduit deux chemins γ_z^1 et γ_z^2 allant de z_0 à z , tracés dans U . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_z^1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right)}{\exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_z^2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right)} &= \exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_z^1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{k} \int_{\gamma_z^2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_z^1 \cdot \overline{\gamma_z^2}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) \\ &= \exp(2in\pi) = 1 \end{aligned}$$

pour un certain entier $n \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente et la condition (1), puisque $\gamma_z^1 \cdot \overline{\gamma_z^2}$ est un lacet fermé tracé dans U .

- (b) Comme dans la question 2, on montre que H est holomorphe sur U , en calculant $H(z+h) - H(z)$. Avec un raisonnement similaire, on obtient

$$H(z+h) - H(z) = H(z) \left[\exp\left(\frac{1}{k} \int_{\gamma_{[z, z+h]}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta\right) - 1 \right]$$

et comme on a vu que

$$\int_{\gamma_{[z, z+h]}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = h \frac{f'(z)}{f(z)} + o(h)$$

lorsque $h \rightarrow 0$, on en déduit par composition que $\frac{H(z+h)-H(z)}{h} = H(z) \frac{f'(z)}{f(z)} + o(1)$. Ainsi, H est holomorphe sur U de dérivée $H \frac{f'}{f}$. En choisissant $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha_0^k = f(z_0)$, on pose alors

$$h(z) := \alpha_0 H(z).$$

Le rapport $z \mapsto \frac{h(z)^k}{f(z)}$ prend alors la valeur 1 en $z = z_0$ et un calcul immédiat montre que sa dérivée est nulle sur l'ouvert connexe U , donc il est constamment égal à 1, i.e., $h(z)^k = f(z)$ pour tout $z \in U$.

5. (a) Soit

$$f(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}.$$

Alors f est entière (série entière de rayon de convergence infini). De plus, $f(0) = 1$ et pour tout $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

En particulier, f ne s'annule pas sur le disque unité $\mathbb{D}$, donc

$$h(z) := \frac{1}{f(z)}$$

est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et vérifie la propriété demandée. On a $h(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$.

(b) Pour un lacet circulaire entourant l'origine, on a

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} \frac{e^z h(z)}{z} dz = e^0 h(0) = 1 \neq 0.$$

d'après le théorème de Cauchy. D'après la question 2, f n'admet donc pas de logarithme holomorphe.

6. D'après la question 4, il faut que

$$p = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} \frac{pz^{p-1}}{z^p} \in k\mathbb{Z}$$

ce qui donne $p \in k\mathbb{Z}$. La condition est évidemment suffisante.

Exercice 11. 1. Démontrer que l'expression $z \rightarrow e^{1/(2z)} + e^z$ définit une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$.

2. Calculer $f(\frac{1}{2i\pi n})$ et en déduire la nature de la singularité en $z = 0$.

3. Donner le développement de Laurent de f sur $\mathbb{C}^*$ et déterminer son résidu en l'origine.

4. Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto f(z) - cz^{-1}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^*$?

Solution 11 1. Par composition.

2. On a $f(1/(2i\pi n)) = e^{in\pi} + e^{\frac{1}{2i\pi n}} = (-1)^n + 1 + o_{n \rightarrow \infty}(1)$. On voit donc que $|f(z)|$ ne peut pas admettre de limite (finie ou infinie) lorsque $z \rightarrow 0$, et donc la singularité en 0 est essentielle.

3. Pour tout complexe $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(z) &:= e^{1/(2z)} + e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (2z)^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \end{aligned}$$

avec

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k k!} & \text{si } k < 0 \\ 2 & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{k!} & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a_k \neq 0$, on retrouve le fait que f admet une singularité essentielle en 0, via la caractérisation par la série de Laurent.

4. Il faut et il suffit que $c = a_{-1} = \frac{1}{2}$. En effet, pour $c = a_{-1}$, le terme en $\frac{1}{z}$ s'annule dans le développement en série de Laurent de $f(z) - cz^{-1}$, et on peut construire une primitive "évidente" en intégrant terme à terme :

$$F(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}.$$

Ceci définit bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, comme on peut le voir en l'écrivant sous la forme

$$F(z) = f(z) + g(1/z)$$

où

$$f(z) := \sum_{k \geq 1} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \quad \text{et} \quad g(z) := \sum_{k \geq 1} \frac{a_{-k-1}}{-k} z^k$$

sont des séries entières de rayon de convergence infini (par exemple avec le critère d'Hadamard). Réciproquement, si $c \neq a_{-1}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,1)} (f(z) - cz^{-1}) dz = a_{-1} - c \neq 0$$

donc $f(z) - cz^{-1}$ n'admet pas de primitive holomorphe.

Exercice 13. 1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soient $a \in U$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- (a) En revenant à la définition, montrer que la fonction $g : z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^k}$ définie sur $U \setminus \{a\}$ est méromorphe en a .
- (b) Exprimer le résidu $\text{Res}_g(a)$ en fonction des dérivées de f au point a .
2. Montrer que chacune des expressions suivantes définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont on déterminera les pôles. On précisera l'ordre et le résidu pour chaque pôle :
- (a) $f : z \mapsto \frac{z}{z^2+1}$
- (b) $f : z \mapsto \frac{z^2+z+2}{(z-2)(z-1)^2}$
- (c) $f : z \mapsto (e^z - 1)/\sin z$

Solution 13 1. (a) En développant f en série entière au voisinage de a et en factorisant par la plus grande puissance de $(z-a)$ possible, on peut écrire

$$f = (z-a)^\nu \tilde{f}(z)$$

pour tout $z \in \omega \setminus \{a\}$, dans un voisinage $\omega \subset U$ de a , avec $\nu \in \mathbb{N}$ et $\tilde{f}$ holomorphe vérifiant $\tilde{f}(a) \neq 0$. On a alors deux cas possibles

- i. Si $k \leq \nu$, alors la fonction g se prolonge au voisinage de a par la fonction holomorphe $z \mapsto (z-a)^{k-\nu} \tilde{f}(z)$. Elle admet donc une singularité illusoire en 0.
- ii. Si $k > \nu$, alors puisque $\tilde{f}(a) \neq 0$, la fonction

$$z \mapsto \frac{(z-a)^{k-\nu}}{\tilde{f}(z)}$$

est holomorphe au voisinage de a , s'annule en $z = a$, et prolonge $\frac{1}{g}$, donc a est un pôle de g .

- (b) En développant f en série entière dans un voisinage ω de a et en divisant ce développement par $(z-a)^k$ pour $z \neq a$, on obtient

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)(z-a)^{n-k}}{n!} = \sum_{n=-k}^{+\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^k, \quad z \in \omega \setminus \{a\}.$$

Le résidu en a est par définition le coefficient $n = -1$ de ce développement, soit

$$\text{Res}_g(a) = \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

2. (a) C'est une fonction méromorphe comme quotient de fonctions (holomorphes donc) méromorphes. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, et au voisinage des points i et $-i$, $z \mapsto \frac{z^2+1}{z}$ définit un prolongement holomorphe de $1/f$ qui s'annule en i et $-i$. Ceci montre que i et $-i$ sont les deux seuls pôles. Ils sont d'ordre 1 puisque $f(z) = \frac{h_1(z)}{z+i} = \frac{h_2(z)}{z-i}$ où les fonctions $h_1(z) = \frac{z}{z-i}$ et $h_2(z) = \frac{z}{z+i}$ sont holomorphes et ne s'annulent pas, respectivement, au voisinage de $-i$ et $+i$. D'après la première question (avec $k = 1$), les résidus sont donnés par

$$\text{Res}_i(f) = \frac{h_2^{(1-1)}(i)}{(1-1)!}(i) = \frac{h_2(i)}{1} = \frac{1}{2}, \quad \text{Res}_{-i}(f) = h_1(-i) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Cette fonction est méromorphe comme quotient, ses pôles sont 1 et 2, d'ordre respectifs 2 et 1. On a

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2}$$

avec $g(z) = \frac{z^2+z+2}{z-2}$. D'après la question précédente avec $k = 2$,

$$\text{Res}_f(1) = g'(1)$$

Calculons

$$g'(z) = \frac{(2z+1)(z-2) - (z^2+z+2)}{(z-2)^2} = \frac{z^2-4z-4}{(z-2)^2}$$

donc $g'(1) = -7$. D'autre part,

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-2}$$

avec $h(z) = \frac{z^2+z+2}{(z-1)^2}$ et d'après la question précédente avec $k = 1$,

$$\text{Res}_f(2) = h(2) = 8.$$

- (c) C'est encore un quotient de fonctions entières, donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Elle est holomorphe en tout point $a \notin \pi\mathbb{Z}$. En $a = 0$, elle admet une singularité illusoire car, en développant autour de 0, on a $e^z - 1 = zh_1(z)$ et $\sin(z) = zh_2(z)$ où h_2 ne s'annule pas au voisinage de 0. Pour $a = n\pi$ avec n entier non nul, la singularité est un pôle car $e^a - 1 \neq 0$. Pour calculer le résidu, on peut écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}$$

où g est la fonction holomorphe définie par

$$g(z) = \frac{(e^z - 1)(z - a)}{\sin(z)}$$

pour $z \neq a$ au voisinage de a , et $g(a) = \frac{e^a - 1}{\cos(a)} = (-1)^n(e^{n\pi} - 1)$. D'après la première question, le résidu en a n'est autre que $f(a)$.

2 Chapitre 4

Exercice 1. (Calculs pratiques de résidus)

Démontrer les formules de cours suivantes, où f et g sont des fonctions méromorphes sur un ouvert Ω et $\nu_f(a)$ désigne la valuation de f en a .

1. Si $\nu_f(a) \geq -1$, alors

$$\text{Res}_f(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

2. Si a est un pôle d'ordre k de f alors

$$\text{Res}_f(a) = \frac{\tilde{f}^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}, \quad \tilde{f}(z) := (z - a)^k f(z)$$

3. Si $\nu_f(a) \geq 0$ et $\nu_g(a) = 1$ alors

$$\text{Res}_{f/g}(a) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

4. La fonction f'/f est méromorphe. Ses pôles sont tous simples et sont donnés par les zéros et les pôles de f . De plus,

$$\text{Res}_{f'/f}(a) = \nu_f(a).$$

Solution 1 1. Immédiat sur la série de Laurent

2. Vu à l'exercice précédent

3. Les conditions entraînent que $\frac{f}{g}$ possède un pôle d'ordre 1 en a , et $g(a) = 0$, et $g'(a) \neq 0$. D'après la question 1,

$$\text{Res}_{f/g}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)(z-a)}{g(z)} = \frac{f(a)}{\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

4. $\frac{f'}{f}$ est méromorphe comme quotient de fonctions méromorphes. Pour tout $a \in \Omega$, en notant $k := \nu_f(a)$, on peut écrire

$$f(z) = g(z)(z-a)^k \quad f'(z) = g'(z)(z-a)^k + kg(z)(z-a)^{k-1}$$

où g est holomorphe et ne s'annule pas au voisinage de a , donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{\nu_f(a)}{(z-a)}$$

Exercice 3.

Soit $R > 0$ avec R différent de $1/2$ et de 2 . On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens direct. Selon les valeurs de $R > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}.$$

Solution 3

Soit $f(z)$ l'intégrande. On a

$$f(z) = \frac{1}{2(z - \frac{1}{2})(z - 2)}.$$

Les pôles sont $\frac{1}{2}$ et 2 , et leurs résidus sont

$$\text{Res}_f(1/2) = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2(z - 2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Res}_f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{2(z - \frac{1}{2})} = \frac{1}{3}.$$

Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, d'après le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } R \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{-2i\pi}{3} & \text{si } R \in (\frac{1}{2}, 2) \\ 0 & \text{si } R > 2. \end{cases}$$

Exercice 5. 1. Soient $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ deux polynômes vérifiant $\deg(Q) - \deg(P) \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{a_k} \text{Res}_{\frac{P}{Q}}(a_k) = 0$$

où la somme s'étend sur les singularités isolées a_k de P/Q .

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que f soit holomorphe sur la "couronne extérieure" $A_{R,\infty} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R(0)$, et on définit le *résidu à l'infini* de f comme

$$\text{Res}_f(\infty) = \text{Res}_{\frac{-1}{z^2} f(\frac{1}{z})}(0).$$

Démontrer que

$$\sum_{a_k} \text{Res}_f(a_k) = 0$$

où la somme s'étend sur les singularités isolées de f , en incluant $a_k = \infty$.

Solution 5 1. D'après le théorème des résidus, pour tout $R > \max_k |a_k|$,

$$\sum_{a_k \text{ pôle de } P/Q} \text{Res}_{\frac{P}{Q}}(a_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz. \quad (3)$$

Or, en notant $n := \deg(P)$ et $c_P \neq 0$ et $c_Q \neq 0$ les coefficients dominants de P et Q , respectivement, on a $|P(z)| \sim |c_P||z|^n$, $|Q(z)| \sim |c_Q||z|^{n+2}$ pour $|z| \rightarrow \infty$, donc il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout R suffisamment grand,

$$\left| \int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq C \frac{2\pi R}{R^2}.$$

En particulier,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

En passant à la limite $R \rightarrow \infty$ dans (3), on obtient donc

$$\sum_{a_k \text{ pôle de } P/Q} \text{Res}_{\frac{P}{Q}}(a_k) = 0.$$

2. Notons $g(z) := \frac{-1}{z^2} f(\frac{1}{z})$, qui est holomorphe sur le disque épointé $\mathbb{D}_r(0) \setminus \{0\}$ pour $r = R^{-1}$. D'après le cours, le résidu en 0 de g peut être calculé par la formule

$$\operatorname{Res}_g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho)} g(z) dz.$$

où $0 < \rho < r$. En paramétrant l'intégrale, on en déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_f(\infty) = \operatorname{Res}_g(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g(\rho e^{i\theta}) i \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{-1}{\rho^2 e^{-2i\theta}} f(\rho^{-1} e^{-i\theta}) i \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\rho^{-1} e^{-i\theta}) i \rho^{-1} e^{-i\theta} d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\rho^{-1} e^{i\theta}) i \rho^{-1} e^{i\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho^{-1})} f(z) dz. \end{aligned}$$

Puisque $\rho^{-1} > R$, tous les pôles de f sont contenus dans le disque $\mathbb{D}_{\rho^{-1}}(0)$, donc le théorème des résidus donne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,\rho^{-1})} f(z) dz = \sum_{a_k \neq \infty} \operatorname{Res}_f(a_k).$$

Ainsi,

$$0 = \operatorname{Res}_f(\infty) + \sum_{a_k \neq \infty} \operatorname{Res}_f(a_k) = \sum_{a_k} \operatorname{Res}_f(a_k).$$

(on obtient ainsi un cas particulier du théorème des résidus sur les variétés Riemanniennes compactes, ici la *sphère de Riemann* $\approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$).