

TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 6

Exercice 6. (Calcul d'une intégrale)

Soit $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, supposée bornée sur le demi plan-complexe supérieur $\{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$. En utilisant le théorème des résidus, déterminer, pour tout $n \geq 1$ la valeur de l'intégrale absolument convergente

$$I_n := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(x)}{1+x^{2n}} dx.$$

Montrer que dans le cas particulier où $\lambda \equiv 1$, $I_n = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}$.

Solution 6

On considère la fonction méromorphe $f : z \mapsto \lambda(z)(1+z^{2n})^{-1}$. Comme λ est bornée sur $\{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, elle n'y admet aucun pôle, donc les pôles de f dans le demi-plan complexe supérieur sont tous d'ordre 1 et donnés $z_0, \dots, z_{n-1}$, où les complexes z_k sont les racines $2n$ -ièmes complexes de (-1) :

$$z_k = e^{i\frac{\pi}{2n}} e^{i\frac{k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, 2n-1$$

(parmi celles-ci, seules les z_k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont situées dans le demi-plan supérieur). De plus,

$$1+z^{2n} = (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{2n-1}),$$

et en dérivant de part et d'autre, on remarque que

$$2nz^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \prod_{j \neq k} (z - z_j).$$

Ceci évalué en l'une des racines $z = z_k$ fournit l'égalité

$$\prod_{j \neq k} (z_k - z_j) = 2nz_k^{2n-1} = -\frac{2n}{z_k}, \quad k = 0, \dots, 2n-1.$$

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, le résidu de f en z_k est donc donné par

$$\operatorname{Res}_f(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k)f(z) = \frac{\lambda(z_k)}{\prod_{j \neq k} (z_k - z_j)} = -\frac{z_k}{2n} \lambda(z_k).$$

Pour un $R > 1$, considérons le contour orienté γ_R parcourant d'abord le segment $[-R, R]$ sur l'axe réel dans le sens des abscisses croissantes, puis le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, $[0, \pi] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta}$ dans le sens trigonométrique, comme sur la figure 1 ci-dessous.

Seuls les pôles z_k avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ sont enlacés par ce contour. De plus, la fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, donc d'après le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}_f(z_k) \\ &= \frac{-i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k \lambda(z_k). \end{aligned}$$

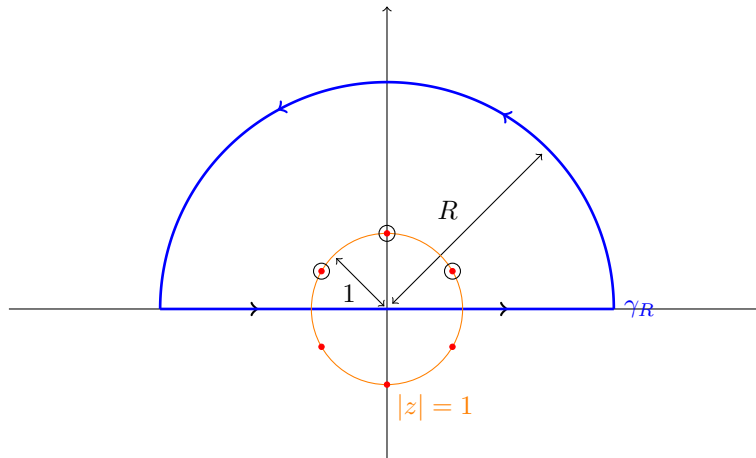


FIGURE 1 – Le contour γ_R (en bleu) utilisé pour appliquer le théorème des résidus. Les racines de $1 + z^{2n}$ sont représentées en rouge, les pôles de f situés dans le contour sont entourés.

Pour $\lambda \equiv 1$, ceci donne

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{i\pi e^{i\frac{\pi}{2n}}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k \\ &= -\frac{i\pi e^{i\frac{\pi}{2n}}}{n} \frac{1 - e^{i\pi}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{2n}} - e^{-i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que l'intégrale sur le demi-cercle converge vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$. En effet, en notant C_R le contour orienté correspondant,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \sup_{z \in C_R} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^{2n} - 1}.$$

On a donc

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \begin{cases} -\frac{i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z_k \lambda(z_k) & \text{dans le cas général,} \\ \frac{\pi}{n \sin(\frac{2\pi}{n})} & \text{dans le cas particulier } \lambda \equiv 1. \end{cases}$$

Exercice. (Calcul d'une intégrale)

Soit $a \in]0, 1[$.

1. En utilisant le théorème des résidus, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Indication : on pourra utiliser un contour rectangulaire de sommets $\pm R$ et $\pm R + 2i\pi$.

2. À l'aide d'un changement de variable, en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} \frac{t^{-a}}{1+t} dt$.

Solution 1. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

méromorphe sur $\mathbb{C}$ comme quotient de fonctions holomorphes. Le contour γ_R proposé en indication (orienté dans le sens direct) enlace une seule singularité isolée de f , le point $z_0 = i\pi$, voir Figure ??

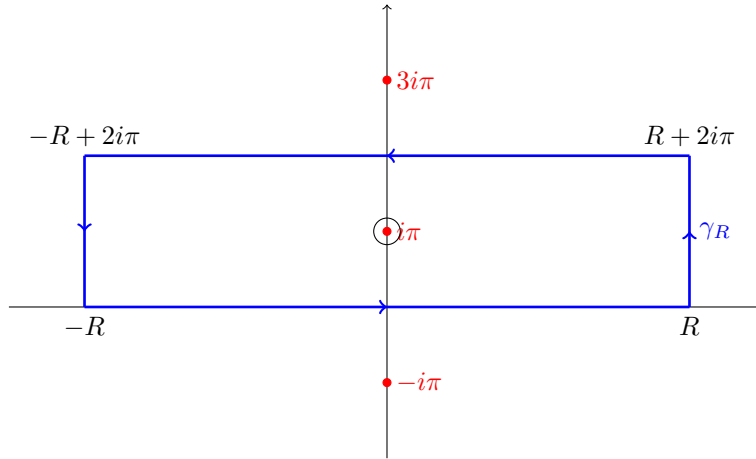


FIGURE 2 – Le contour rectangulaire utilisé pour appliquer le théorème des résidus. Les pôles de la fonction f sont signalés en rouge, et le seul pôle enlacé par le contour est entouré.

De plus, comme

$$e^{ia\pi} \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (1 + e^z) |_{z=i\pi} \neq 0$$

c'est un pôle d'ordre 1. Le résidu est donné par

$$\text{Res}_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^{az}(z - z_0)}{1 + e^z} = \frac{e^{ia\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ia\pi}.$$

D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = -2i\pi e^{ia\pi}.$$

De plus, l'intégrale sur le contour se décompose en quatre contributions pour chaque côté du rectangle :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= \int_{[-R, R]} f(z) dz + \int_{[R, R+2i\pi]} f(z) dz - \int_{[-R+2i\pi, R+2i\pi]} f(z) dz - \int_{[-R, -R+2i\pi]} f(z) dz \\ &=: A + B + C + D. \end{aligned}$$

Pour les intégrales sur les “longs côtés”, on remarque facilement que

$$A = I(a) + o_{R \rightarrow \infty}(1), \quad C = -e^{2i\pi a}(I(a) + o_{R \rightarrow \infty}(1)).$$

Il reste à évaluer les intégrales sur les “petits côtés”. Pour z dans le segment $[R, R + 2i\pi]$, on a

$$|f(z)| \sim \frac{e^{aR}}{e^R + 1} \sim e^{(a-1)R}$$

tandis que pour z dans le segment $[-R, -R + 2i\pi]$,

$$|f(z)| \sim \frac{e^{-aR}}{e^{-R} + 1} \sim e^{-aR}$$

lorsque $R \rightarrow \infty$. Ainsi, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout R suffisamment grand, on ait l'estimation

$$|B| + |D| \leq MR(e^{(a-1)R} + e^{-aR}) = o_{R \rightarrow \infty}(1).$$

En passant à la limite $R \rightarrow \infty$, on obtient donc au total

$$-2i\pi e^{ia\pi} = I(a)(1 - e^{2i\pi a}) \implies I(a) = \pi \frac{2i}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

2. On applique le changement de variable $x = \ln(t)$ dans $I(a)$:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{a \ln(t)}}{1+t} \frac{dt}{t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{-a}}{1+t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{(1-a)-1}}{1+t} dt = I(1-a) = \frac{\pi}{\sin((1-a)\pi)} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

d'après la question précédente.

Exercice. (Fonction Γ)

1. Soient $a < b$ deux réels, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $F : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $z \mapsto F(t, z)$ est holomorphe sur Ω . Démontrer que

$$f(z) := \int_a^b F(t, z) dt, \quad z \in \Omega$$

est bien définie et holomorphe sur Ω .

Indication : on pourra introduire la suite des sommes de Riemann

$$f_n(z) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n F\left(a + k \frac{b-a}{n}, z\right)$$

et montrer leur convergence uniforme vers f sur tout compact de Ω .

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n de l'indication est holomorphe sur Ω (comme somme finie de fonctions holomorphes). Pour montrer que f est holomorphe, il suffit donc de démontrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .

À cette fin, on peut écrire, en notant $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$,

$$\begin{aligned} f(z) - f_n(z) &= \int_a^b F(t, z) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n F(a + k\Delta_n, z) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\Delta_n}^{a+k\Delta_n} F(t, z) dt - \left(\int_{a+(k-1)\Delta_n}^{a+k\Delta_n} 1 dt \right) \sum_{k=1}^n F(a + k\Delta_n, z) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\Delta_n}^{a+k\Delta_n} F(t, z) - F(a + k\Delta_n, z) dt. \end{aligned}$$

Soit $K \subset \Omega$ un compact. La fonction F étant continue, elle est uniformément continue sur le compact $[a, b] \times K$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que

$$\forall (t, z), (t', z') \in [a, b] \times K, \quad |t - t'| + |z - z'| \leq \delta(\varepsilon) \implies |F(t, z) - F(t', z')| \leq \varepsilon.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $z \in K$ arbitrairement fixés, et choisissons n tel que $\Delta_n \leq \delta(\varepsilon)$. Pour tout t dans l'intervalle d'intégration $[a + (k-1)\Delta_n, a + k\Delta_n]$, on a $|t - (a + k\Delta_n)| \leq \Delta_n \leq \delta(\varepsilon)$, et donc

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\Delta_n}^{a+k\Delta_n} |F(t, z) - F(a + k\Delta_n, z)| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a+(k-1)\Delta_n}^{a+k\Delta_n} \varepsilon dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \Delta_n \varepsilon = (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$\Phi_\varepsilon(z) := \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Solution

C'est une application directe de la question précédente avec $a = \varepsilon$ et $b = 1/\varepsilon$, la fonction $t^{z-1} e^{-t} = e^{(z-1)\ln(t)-t}$ étant holomorphe en z et continue sur $[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}] \times \mathbb{C}$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{H}_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$, on note

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Démontrer que $\Gamma(z)$ est bien définie et que $\Gamma : \mathbb{H}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. Que vaut $\Gamma(1)$?

Solution

On a

$$|t^{z-1} e^{-t}| = |e^{(z-1)\ln(t)-t}| = e^{\operatorname{Re}(z-1)\ln(t)-t} = t^{\operatorname{Re}(z)-1} e^{-t}.$$

Pour $z \in \mathbb{H}_0$, cette fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (par le critère de Riemann).

Soient $0 < a < b < \infty$. On commence par montrer que Φ_ε converge uniformément vers Γ sur la bande infinie verticale $B_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re}(z) < b\}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, on observe que

$$\forall z \in B_{a,b}, \quad t^{\operatorname{Re}(z)} \leq \begin{cases} t^a & \text{si } t < 1 \\ t^b & \text{sinon} \end{cases} \leq \max(t^a, t^b)$$

par conséquent

$$|\Gamma(z) - \Phi_\varepsilon(z)| \leq \int_{]0, \varepsilon[\cup]\varepsilon^{-1}, +\infty[} \max(t^{a-1}, t^{b-1}) e^{-t} dt, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall z \in B_{a,b}.$$

Comme l'intégrande dans le membre de droite est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (critère de Riemann) et ne dépend pas de z , on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{z \in B_{a,b}} |\Gamma(z) - \Phi_\varepsilon(z)| = 0,$$

donc $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge uniformément vers Γ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ sur $B_{a,b}$. Ceci montre que Γ est holomorphe sur $B_{a,b}$, puis sur $\mathbb{H}_0 = \bigcup_{0 < a < b < \infty} B_{a,b}$.

La valeur de $\Gamma(1)$ est obtenue par intégration directe

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = (-e^{-\infty} - e^{-0}) = 1.$$

4. Établir la relation

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{H}_0,$$

et en déduire que $z \mapsto \Gamma(z+1)$ est un prolongement analytique de la fonction factorielle sur les entiers. Est-ce le seul tel prolongement?

Solution

Cette relation peut s'obtenir via l'intégration par parties suivante, que l'on peut effectuer pour tout $z \in \mathbb{H}_0$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \underbrace{[t^z \cdot (-e^{-t})]_0^\infty}_{=0} - \int_0^{+\infty} z t^{z-1} \cdot (-e^{-t}) dt = z\Gamma(z).$$

Comme $\Gamma(0+1) = 0! = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais la fonction Γ n'est pas le seul prolongement analytique de $n \mapsto n!$: il suffit d'ajouter n'importe quelle fonction entière non-nulle s'annulant sur les entiers, comme $z \mapsto \sin(\pi z)$.

5. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{H}_{-n} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > -n\}.$$

En utilisant la relation précédente, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction méromorphe $\Gamma_{-n} : \mathbb{H}_{-n} \rightarrow \mathbb{C}$ qui coïncide avec Γ sur $\mathbb{H}_0$. Déterminer les pôles de Γ_{-n} et leur ordre.

Solution

L'idée est que l'égalité

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

est vraie pour $z \in \mathbb{H}_0$ (d'après la question précédente) met en jeu deux fonctions holomorphes dont l'une (à gauche) a pour domaine $\mathbb{H}_0$, tandis que l'autre (à droite) a pour domaine $\mathbb{H}_{-1} \setminus \{0\}$, par simple jeu de décalage, puisqu'il suffit que $z \in \mathbb{H}_{-1}$ pour $z+1$ "atterrisse" dans $\mathbb{H}_0$. Ceci montre que Γ admet une (unique, par principe d'identité) extension holomorphe à $\mathbb{H}_{-1} \setminus \{0\}$. De plus, la singularité de $z \mapsto \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ en 0 est un pôle d'ordre 1, puisque $\lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = 1$.

Pour obtenir un prolongement sur $\mathbb{H}_{-n}$, il suffit d'itérer cet argument par récurrence. En effet, supposons obtenu un prolongement méromorphe Γ_{-n} sur $\mathbb{H}_{-n}$, pour $n \geq 1$, avec des pôles d'ordre 1 aux points $0, -1, \dots$ et $-(n-1)$. On a encore

$$\Gamma_{-n}(z+1) = z\Gamma_{-n}(z)$$

puisque c'est vrai pour $z \in \mathbb{H}_0$ (étant donné que Γ_{-n} prolonge Γ) et donc encore sur $\mathbb{H}_{-n}$ en tant qu'égalité de fonctions méromorphes, par le principe d'identité. Mais alors

$$\Gamma_{-n}(z) = \frac{\Gamma_{-n}(z+1)}{z} =: \Gamma_{-n-1}(z)$$

et le même argument que ci-dessus nous fait voir que la fonction méromorphe Γ_{-n-1} (comme quotient de fonctions méromorphes) étend Γ_{-n} sur $\mathbb{H}_{-n-1}$. Sur $\mathbb{H}_{-n}$, les pôles de Γ_{-n-1} sont les mêmes que ceux de Γ_{-n} (puisque ces deux fonctions coïncident à cet endroit !), c'est-à-dire, d'après l'hypothèse de récurrence, $\{0, -1, \dots, -(n-1)\}$. Enfin, sur $\mathbb{H}_{-n-1} \setminus \mathbb{H}_{-n}$, la fonction $\Gamma_{-n-1}(z) = \Gamma_{-n}(z+1)/z$ admet un seul nouveau pôle d'ordre 1 en $z = -n$ (puisque $-n+1$ est un pôle d'ordre 1 de Γ_{-n} et $1/z$ est holomorphe en $-n$).

6. En déduire qu'il existe une unique fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui coïncide avec Γ sur $\mathbb{H}_0$. On note encore Γ cette fonction méromorphe.

Solution

On applique un exercice d'un TD précédent : on a le recouvrement

$$\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{H}_{-n} \setminus \{0, \dots, -(n-1)\}),$$

et des fonctions holomorphes sur chaque ouvert de ce recouvrement qui coïncident (par le principe d'identité, puisqu'elles coïncident avec Γ sur $\mathbb{H}_0$) sur les intersections de leur domaine de définition. Il existe donc une fonction holomorphe $\tilde{\Gamma}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ étendant toutes ces fonctions, et donc en particulier Γ . De plus, comme $\tilde{\Gamma}$ coïncide localement avec l'une des fonctions Γ_{-n} , elle est méromorphe en chaque entier négatif, avec un pôle d'ordre 1.

7. Déterminer les résidus de Γ en chacun de ses pôles.

Solution

Commençons par calculer le résidu en $z = 0$. Comme c'est un pôle simple, on a

$$\operatorname{Res}_{\Gamma}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0)\Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} (z-0) \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \Gamma(1) = 1.$$

Ensuite, soit $n \leq -1$ un entier. On a de même

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\Gamma}(-n) &= \lim_{z \rightarrow -n} (z - (-n))\Gamma(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -n} (z - (-n)) \frac{\Gamma(z+1)}{z} \\ &= \frac{1}{(-n)} \lim_{z \rightarrow -n} [(z+1) - (-n+1)] \Gamma(z+1) \\ &= \frac{1}{(-n)} \lim_{z \rightarrow -n+1} [z - (-n+1)] \Gamma(z) \\ &= \frac{1}{(-n)} \operatorname{Res}_{\Gamma}(-n+1). \end{aligned}$$

Par récurrence, on en déduit que $\text{Res}_\Gamma(-n) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

8. Démontrer que pour tout $a \in]0, 1[$,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-a}}{1+t} dt,$$

et en déduire la *formule des compléments*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

au sens de l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$.

Indication : utiliser le théorème de Fubini et un changement de variable.

Solution

Soit $a \in]0, 1[$. On a

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} s^{1-a-1} e^{-s} ds \right) \\ &= \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} \left(\int_0^{+\infty} s^{-a} e^{-s} ds \right) dt \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. En effectuant le changement de variable $s = tu$, on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} \left(\int_0^{+\infty} (tu)^{-a} e^{-tu} t du \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\int_0^{+\infty} u^{-a} e^{-tu} du \right) dt \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Fubini pour permuter les intégrales (ici, l'intégrande étant à *termes positifs*, la convergence de l'intégrale "dans un sens" est équivalente à celle "dans l'autre sens", et leurs valeurs – finies ou infinies – sont égales) :

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \int_0^{+\infty} u^{-a} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+u)} dt \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^{-a} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+u)} dt \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{-a}}{1+u} du \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \end{aligned}$$

d'après l'exercice précédent. L'égalité

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

entre fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ en découle par le principe d'identité

9. Déterminer la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Solution

Il est clair que $\Gamma(\frac{1}{2}) \geq 0$ (puisque c'est l'intégrale d'une fonction positive). Or, d'après la formule des compléments,

$$\Gamma(1/2)^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi.$$

Par conséquent, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

10. Démontrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est *entière*.

Solution

D'après la formule des compléments,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)}{\pi}$$

(en tant qu'égalité entre fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$). La fonction au membre de droite est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \dots\}$. De plus, les *pôles simples* de $z \mapsto \Gamma(1 - z)$ – qui sont situés sur les entiers positifs $\{1, 2, \dots\}$ – sont compensés par les *zéros* de $z \mapsto \sin(\pi z)$, si bien qu'en fait, toutes les singularités de $\frac{1}{\Gamma}$ sont illusoires !

Plus précisément, d'une part puisque les entiers $1, 2, \dots$ sont des pôles d'ordre 1 de $\Gamma(1 - \cdot)$, pour chaque entier $n \in \{1, 2, \dots\}$, il existe une fonction holomorphe f_n telle que

$$\Gamma(1 - z) = \frac{f_n(z)}{(z - n)}$$

pour tout z dans un voisinage épointé de n . D'autre part, puisque n est un zéro de $\sin(\pi \cdot)$, on peut écrire $\sin(\pi z) = (z - n)g_n(z)$ pour une certaine fonction holomorphe g_n au voisinage de $z = n$. Ainsi, pour tout z dans un voisinage épointé de $z = n$, on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\pi} \frac{f_n}{(z - n)} \cdot (z - n)g_n(z) = \frac{f_n(z)g_n(z)}{\pi}$$

mais comme le second membre est holomorphe au voisinage (non épointé) de $z = n$, ceci montre que $\frac{1}{\Gamma}$ admet un prolongement holomorphe en $z = n$. La fonction $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$, sans aucun pôle, donc c'est une fonction entière.

Exercice. (Fonction bêta incomplète)

Soient $a \geq 0$ et x un paramètre réel. On définit, pour un nombre complexe s , la fonction

$$F(s) := \int_a^\infty \frac{dt}{t^s(t - x)}.$$

1. Étudier la convergence de l'intégrale en fonction de a , x et s .
2. Pour $a > 0$ et $x < a$, montrer que $F(\cdot)$ définit une fonction holomorphe sur un domaine Ω que l'on déterminera.
3. Soit

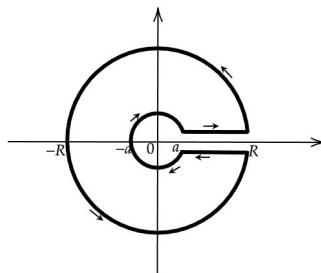
$$G(s) := \frac{\pi}{|x|^s \sin(\pi s)} + a^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k - s} \left(\frac{a}{x}\right)^k, \quad a > 0, x < -a.$$

Déterminer le domaine où G est holomorphe.

4. Soient $a > 0$ et $x < -a$. Montrer que, pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $s \notin \mathbb{Z}$, on a l'égalité

$$F(s) = G(s).$$

Indication : considérer la fonction $f(z) = \frac{1}{z^s(z - x)}$ sur le contour donné par la figure suivante et faire tendre R vers $+\infty$.



5. Déterminer le domaine où $F = G$, puis la région où G prolonge analytiquement F . Préciser le domaine maximal de ce prolongement.
6. Montrer que, pour $|x| < a$, $a > 0$ et $s \in \mathcal{O}$,

$$F(s) = a^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k + s} \left(\frac{x}{a}\right)^k.$$

Solution

C'est un excellent exercice d'entraînement, à vous de jouer. Une solution sera mise en ligne après la rentrée.