

TD d'Analyse complexe

(2025-2026)

Séance 7

Exercices du chapitre 4

Exercice 8. (Calcul d'une intégrale)

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \log(z) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz,$$

où l'on choisit la détermination principale du logarithme. On exprimera le résultat sous la forme d'une série convergente.

Solution 8

La fonction $f(z) = \log(z) \sin(1/(z-1))$ est holomorphe dans le disque épointé $D(1, \frac{1}{2}) \setminus \{1\}$. Calculons le résidu en $z = 1$. Pour ce faire, on développe $\log$ et $z \mapsto \sin(1/(z-1))$ en série de Laurent au voisinage de $z = 1$:

$$\log(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-1)^k, \quad \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l (z-1)^l$$

où

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k = -2p < 0 \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \text{si } k = -(2p+1) < 0 \end{cases}$$

Ces deux séries sont normalement convergentes sur tout compact de $D(1, 1)$ puisque les deux fonctions initiales y sont holomorphes, ce qui permet le calcul du produit de Cauchy pour tout $z \in D(1, 1) \setminus \{1\}$:

$$\log(z) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} a_k b_l (z-1)^{k+l} = \sum_m c_m (z-1)^m \quad \forall z \in D(1, 1) \setminus \{1\},$$

où $c_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m-n} b_n$ est absolument convergente pour tout $m \in \mathbb{Z}$, et la série précédente, converge normalement sur tout compact de $D(1, 1) \setminus \{1\}$. En particulier, la série converge uniformément sur le cercle $C(1, \frac{1}{2})$, et on peut donc l'intégrer terme à terme. On sait d'avance que seul le terme en $(z-1)^m$ pour $m = -1$ est non nul :

$$\int_{\gamma} \log(z) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \int_{\gamma} (z-1)^m = c_{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Ainsi,

$$\int_{\gamma} \log(z) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz = 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-1-n} b_n = (2\pi i) \sum_{p=0}^{\infty} a_{-1-(2p+1)} b_{-(2p+1)} = i\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p(2p+1)!}.$$

Exercice 13. (Transformée de Laplace)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Pour tout complexe z tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on pose

$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) dt.$$

1. Montrer que f est bien définie et holomorphe sur $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

2. Soit

$$\Lambda(f) := \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt < \infty \right\},$$

et soit

$$\sigma(f) := \inf \Lambda(f).$$

Démontrer que $\mathcal{L}f$ admet un unique prolongement holomorphe sur l'ouvert $\Omega_\sigma := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \sigma(f)\}$, et déterminer ses dérivées à tout ordre.

Solution 13 1. On applique le raisonnement vu au TD précédent pour la fonction Γ : on commence par remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$f_\varepsilon : z \mapsto \int_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}} e^{-tz} f(t) dt$$

est holomorphe (par la combinaison des théorèmes de Morera et de Fubini, ou par convergence uniforme des approximations de l'intégrale par série de Riemann). Puis pour $\operatorname{Re}(z) > 0$, on a la majoration

$$\int_0^\infty |e^{-tz} f(t)| dt = \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(z)t} |f(t)| dt \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

ce qui permet de montrer facilement la convergence uniforme sur Ω_0 de f_ε vers f lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On conclut par le théorème de Cauchy selon lequel une limite uniforme d'une suite de fonctions holomorphes est holomorphe (conséquence du théorème de Morera).

2. D'une part on remarque que $\sigma(f) \leq 0$, puisque l'intégrabilité de f , donnée par hypothèse, assure que

$$]0, +\infty[\subset \Lambda(f).$$

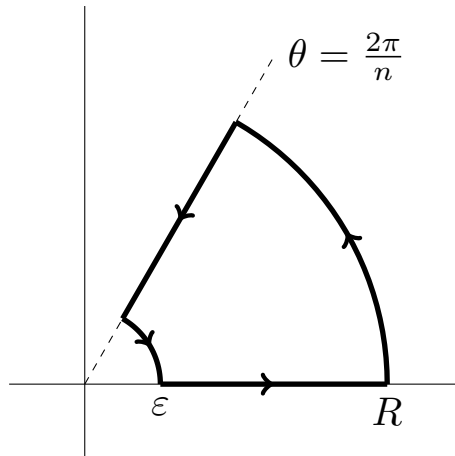
Ainsi, $\Omega_0 \subset \Omega_\sigma$, et le fait que $\mathcal{L}f(z)$ soit toujours bien définie et holomorphe pour tout $z \in \Omega_\sigma$ s'obtient littéralement par le même raisonnement qu'à la question précédente.

Exercice 14. (Calcul d'une intégrale)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $n \geq 2$ et $\alpha \in]-1, n-1[$. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt.$$

On pourra utiliser un contour comme sur la figure ci-dessous



Solution 14

Voici un exemple de rédaction efficace pour ce type d'exercice.

1. Application du théorème des résidus. On note $\log$ la détermination principale du logarithme avec branche de coupure sur $\mathbb{R}_- = [0, +\infty)$. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction méromorphe définie par

$$f(z) = \frac{e^{\alpha \log(z)}}{1+z^n}.$$

Notons $\gamma_{\varepsilon, R}$ le contour de Jordan représenté sur la figure, et $\Omega_{\varepsilon, R}$ l'ouvert borné qu'il délimite. Pour calculer $\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz$, on applique le théorème des résidus [Théorème 4.3 du cours] :

(i) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est ouvert et contient le contour de Jordan $\gamma_{\varepsilon, R}$ et son intérieur $\Omega_{\varepsilon, R}$.

(ii) f est holomorphe sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) \setminus \{z_0\}$ et admet une seule (donc un nombre fini de) singularité isolée en $z_0 \in \Omega_{\varepsilon, R}$.

On a donc

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}_f(z_0).$$

À l'examen, quand vous utilisez un théorème, n'oubliez pas de vérifier soigneusement les hypothèses, au moins pour les premières questions. Corollaire : bien réviser les hypothèses des théorèmes importants du cours !

2. Calcul du résidu. Calculons le résidu de f en z_0 . Comme f s'écrit

$$f = \frac{g}{h}$$

avec $g(z_0) \neq 0$ et $h(z_0) = 0$, mais $h'(z_0) \neq 0$, la singularité isolée en z_0 est un pôle d'ordre 1. On a donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z)} \\ &= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

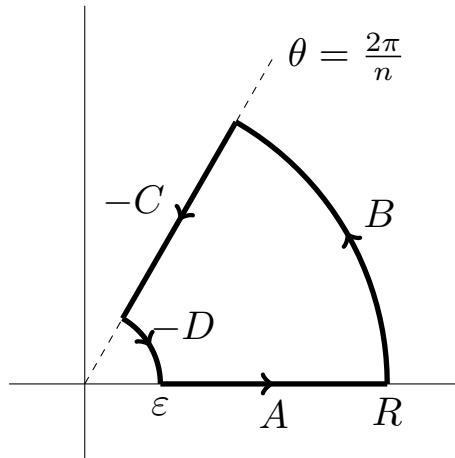
Ainsi,

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz = -\frac{2i\pi}{n} e^{i(\alpha+1)\pi}.$$

3. Calcul de chaque morceau de l'intégrale. On décompose

$$\int_{\gamma_{\varepsilon, R}} f(z) := A + B - C - D$$

où chaque lettre désigne l'intégrale sur l'une des portions des contours d'après le dessin ci-dessous Dans ce type d'exercice, pour gagner du temps, n'hésitez pas à procéder ainsi à des "définition par le dessin".



D'une part,

$$A = \int_{\varepsilon}^R \frac{t^{\alpha}}{1+t^n} dt = I + r_1(\varepsilon) + r_2(R)$$

où $r_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $r_2(R) \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$ (par convergence absolue de l'intégrale). D'autre part, pour $R > 1$,

$$|B| \leq \frac{2\pi}{n} \sup_{\theta \in [0, 2\pi/n]} |f(Re^{i\theta})| \leq \frac{2\pi R}{n} \sup_{\theta \in [0, 2\pi/n]} \frac{e^{\operatorname{Re}(\alpha \log(Re^{i\theta}))}}{|1 + R^n e^{in\theta}|} \leq \frac{2\pi R}{n} \frac{e^{\alpha \operatorname{Re}(\log(R) + i\theta)}}{R^n - 1} = \frac{2\pi R^{1+\alpha}}{n(R^n - 1)}$$

donc, comme $1 + \alpha < n$ par hypothèse, $B \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$. Ensuite,

$$C = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{\alpha \log(te^{i\frac{2\pi}{n}})}}{1 + t^n e^{i2\pi}} e^{i\frac{2\pi}{n}} t dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{t^{\alpha} e^{i\alpha\frac{2\pi}{n}}}{1 + t} e^{i2\pi/n} dt = e^{i(\alpha+1)\frac{2\pi}{n}} I + r_3(\varepsilon) + r_4(R)$$

où r_3 et r_4 sont encore des fonctions-restes convergent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0/R \rightarrow \infty$. Enfin, pour $\varepsilon < 1$, on par une majoration similaire au cas de B

$$|D| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{n} \frac{\varepsilon^{\alpha}}{1 - \varepsilon^n}$$

donc comme $1 + \alpha > 0$ par hypothèse, $D \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Conclusion. En passant à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$ puis $R \rightarrow \infty$ dans l'égalité

$$-\frac{2\pi i}{n} e^{i(\alpha+1)\frac{\pi}{n}} = A + B - C - D$$

on obtient donc

$$-\frac{2\pi i}{n} e^{i(\alpha+1)\frac{\pi}{n}} = I(1 - e^{i(\alpha+1)\frac{2\pi}{n}}) \implies I = -\frac{2\pi i}{n} \frac{1}{e^{-i(\alpha+1)\frac{\pi}{n}} - e^{i(\alpha+1)\frac{\pi}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin((\alpha+1)\frac{\pi}{n})}.$$

Exercice 9. (Lemmes du petit et du grand cercle)

1. (Lemme du petit cercle). Soient $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ tels que $\alpha \leq \beta$, et pour tout $r > 0$, soit $\gamma_r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_r(t) = a + re^{it}$. Soit $R > 0$ et $f : \mathbb{D}_R(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe en a telle que $\nu_a(f) \geq -1$ (i.e., f admet un pôle d'ordre 1, ou une singularité illusoire en a). Démontrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\beta - \alpha)i \operatorname{Res}_f(a).$$

2. (Lemme du grand cercle). Soit $R_0 > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ tel que $\gamma_R([\alpha, \beta]) \subset \Omega$ pour tout $R > R_0$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On pose

$$M(R) := \sup \left\{ |f(z)| \mid z \in \gamma_R([\alpha, \beta]) \right\}.$$

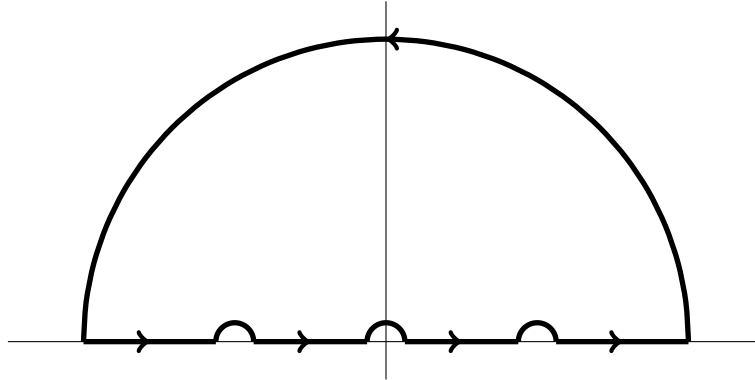
Montrer que si $M(R) = o(R^{-1})$ pour $R \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

3. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, montrer que l'intégrale

$$I_{\alpha} = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} \ln(t)}{t^2 - 1}$$

est absolument convergente, et déterminer sa valeur. On pourra se servir du contour représenté sur la figure ci-dessous



Solution 9 1. En développant f en série de Laurent au voisinage de la singularité isolée a , on peut écrire

$$f(z) = \frac{\text{Res}_f(a)}{z-a} + g(z)$$

où g est holomorphe sur $\mathbb{D}_\delta(a)$ pour un certain $\delta > 0$. On a donc

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = \text{Res}_f(a) \int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a} dz + \int_{\gamma_r} g(z) dz.$$

D'une part, par continuité de g , pour $r < \frac{\delta}{2}$, le second terme peut être estimé par

$$\left| \int_{\gamma_r} g(z) dz \right| \leq |\gamma_r| \cdot \sup_{z \in \gamma_r} |g(z)| \leq (\beta - \alpha)r \max_{z \in \mathbb{D}_{\delta/2}(a)} |g(z)| = o_{r \rightarrow 0}(1).$$

D'autre part, on a le calcul explicite

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a} dz = \int_\alpha^\beta \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = i(\beta - \alpha).$$

Ainsi,

$$\int_{\gamma_r} f(z) dz = i(\beta - \alpha) + o_{r \rightarrow 0}(1).$$

2. Pour cette question, il suffit d'effectuer une majoration directe de l'intégrale.
3. L'intégrande est intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$ par le critère de Riemann, et est bornée sur tout compact (puisque $\ln(1) = 0$), donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On pose

$$f(z) = \frac{e^{\alpha \log(z)} \log(z)}{z^2 - 1}$$

où $\log$ est la détermination du logarithme définie par

$$\log(re^{i\theta}) := \log r + i\theta$$

pour $r > 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ (i.e., on choisit la branche de coupure sur la demi-droite imaginaire négative). Notons qu'avec ce choix,

$$\log(-1) = i\pi.$$

La fonction est alors holomorphe dans le domaine $\Omega_{\varepsilon, R}$ bordé par le lacet représenté sur la figure, où $\varepsilon < 1$ est le rayon des petits demi-cercles, et $R > 1$ celui du grand cercle. Sur $\Omega := \mathbb{C} \setminus (i[0, \infty[)$, f admet une singularité illusoire en $z = 1$ (puisque $\log(1) = 0$), et un pôle d'ordre 1 en $z = -1$, dont le résidu est donné par

$$\text{Res}_f(-1) = -\frac{i\pi e^{i\pi\alpha}}{2}.$$

Ainsi,

- (a) L'intégrale sur le petit demi-cercle centré en 1 tend vers 0 pour $\varepsilon \rightarrow 0$ d'après le lemme du petit cercle (le résidu étant égal à 0).
- (b) D'après le lemme du petit cercle, l'intégrale sur le petit demi-cercle centré en -1 tend vers (compte tenu de l'orientation)

$$-i\pi \text{Res}_f(-1) = -\frac{\pi^2}{2} e^{i\pi\alpha}.$$

- (c) L'intégrale sur petit demi-cercle centré en 0 tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, non pas par le lemme du petit cercle (car la fonction f n'est pas méromorphe en 0), mais par majoration directe de l'intégrale :

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \pi\varepsilon \sup_{z \in \gamma} \frac{e^{\alpha \text{Re}(\log(z))} |\log(z)|}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\pi\varepsilon^{\alpha+1} \sqrt{\log(\varepsilon)^2 + \pi^2}}{1 - \varepsilon^2} = o(1).$$

- (d) L'intégrale sur le grand cercle tend vers 0 pour $R \rightarrow \infty$ par le lemme du grand cercle.
- (e) L'intégrale sur la portion réelle positive du chemin converge vers I_α lorsque $R \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ (puisque f est intégrable sur $]0, +\infty[$).

(f) En utilisant la propriété

$$\log(-t) = \log(t) + i\pi \quad \forall t > 0$$

vérifiée par la détermination du log que nous avons choisie, l'intégrale sur la partie réelle négative du chemin s'écrit

$$\int_{[\varepsilon, 1-\varepsilon] \cup [1+\varepsilon, R]} \frac{e^{i\alpha\pi} t^\alpha (\log t + i\pi)}{t^2 - 1} dt = i\pi e^{i\alpha\pi} I_\alpha + r_1(\varepsilon) + r_2(R) + i\pi e^{i\alpha\pi} A_{\varepsilon, R}.$$

où A est une quantité réelle.

On a donc

$$0 = I_\alpha(1 + e^{i\alpha\pi}) - \frac{\pi^2}{2} e^{i\alpha\pi} + i\pi e^{i\alpha\pi} A_{\varepsilon, R} + r_1(\varepsilon) + r_2(R).$$

En multipliant par $e^{-i\alpha\pi}$ et en prenant la partie réelle du résultat, puis en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow 0$, on trouve donc

$$0 = I_\alpha(\cos(\alpha\pi) + 1) - \frac{\pi^2}{2} \implies I_\alpha = \frac{\pi^2}{2(1 + \cos(\alpha\pi))} = \frac{\pi^2}{4 \cos^2(\alpha\pi/2)}.$$

Un exercice du chapitre 7

Exercice 8. (Calcul de $\zeta(2k)$)

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de la fonction ζ de Riemann aux entiers pairs

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que la fonction

$$H(z) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$. Caractériser ses singularités et les résidus associés.

2. Pour $N \geq 1$ entier, on note Γ_N le contour carré orienté dans le sens direct, de sommets $(N + \frac{1}{2})(1-i)$, $(N + \frac{1}{2})(1+i)$, $(N + \frac{1}{2})(-1+i)$ et $(N + \frac{1}{2})(-1-i)$. Faire un dessin. Déterminer la valeur de

$$I_N(k) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \frac{H(z)}{z^{2k}} dz$$

pour tout entier $k \geq 1$, en fonction de

$$c_k := \text{Res}(H(z)z^{-2k}; 0).$$

3. Justifier que l'on a par ailleurs $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(k) = 0$, et en déduire une expression de $\zeta(2k)$ en fonction de c_k .

4. Démontrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres, dits *de Bernoulli*, tels que

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n z^n}{n!}$$

où la série converge pour tout complexe $z \neq 0$ tel que $|z| < 2\pi$. Calculer B_0 , B_1 et B_2 .

5. Donner une expression de c_k en fonction d'un nombre de Bernoulli, et en déduire une expression de $\zeta(2k)$.

Solution 8 1. C'est une fonction méromorphe comme quotient de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Le dénominateur admet un zéro en chaque entier $n \in \mathbb{Z}$, et ce zéro est d'ordre 1 puisque

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{d}{dz} (e^{2\pi i z} - 1) = 2\pi i e^{2\pi i n} = 2\pi i \neq 0.$$

La fonction H admet donc un pôle d'ordre 1 en chaque entier n , avec un résidu donné par

$$\text{Res}_H(n) = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1.$$

Sans surprise, le résidu est à chaque fois le même puisque H est 1-périodique ($H(z+1) = H(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$).

2. En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$I_N(k) = 2\pi i c_k + 4\pi i \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2k}}.$$

3. On remarque que $|H(z)|$ est borné uniformément par rapport à $N \geq 1$ sur tout le contour Γ_N . En effet, pour tout z sur l'un des bords verticaux du carré, on a $z = \pm(N + \frac{1}{2}) + it$ pour des t réels, et ainsi

$$e^{2\pi i z} - 1 = e^{i\pi - 2\pi t} - 1 = -(1 + e^{-2\pi t}) < -1.$$

En particulier, $|H(z)| \leq 2\pi$ sur les deux côtés Est/Ouest. Sur les côtés Nord/Sud, on a

$$|H(z)| = e^{\mp 2\pi(N + \frac{1}{2})}$$

donc $|e^{2\pi i z} - 1|$ est minoré par $1 - e^{-2\pi(N + \frac{1}{2})} \sim_{N \rightarrow \infty} 1$ sur le côté Nord, et par $e^{2\pi(N + \frac{1}{2})} - 1 \rightarrow \infty$ sur le côté Sud. Dans tous les cas, ceci nous permet d'obtenir $|H(z)| \leq C$ pour une certaine constante indépendante de N . Comme d'autre part, on a $|z| \geq N$ pour tout $z \in \Gamma_N$, ceci implique

$$|I_N(k)| \leq |\Gamma_N| \sup_{z \in \Gamma_N} \frac{|H(z)|}{|z|^{2k}} \leq O(N) \cdot O(N^{-2k}) = O(N^{1-2k}) = O(N^{-1})$$

puisque $k \geq 1$. D'après la question précédente, on obtient donc

$$\zeta(2k) = -\frac{c_k}{2}.$$

4. La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec une singularité illusoire en 0 (puisque le numérateur et le dénominateur ont un zéro d'ordre 1 en 0). Elle admet donc un prolongement holomorphe sur $\mathbb{D}_{2\pi}$. Ce prolongement est développable en série entière au voisinage de 0, et la série entière obtenue a un rayon de convergence au moins égal à 2π (en fait, nécessairement égal puisque $\frac{z}{e^z - 1}$ diverge lorsque $z \rightarrow 2i\pi$). Les nombres B_n sont donnés par

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^z}{dz^n} \left(\frac{z}{e^z - 1} \right).$$

En particulier, on vérifie que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ et $B_2 = \frac{1}{6}$.

5. Notons $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Pour $z \neq 0$ au voisinage de 0, on a

$$H(z)z^{-2k} = \frac{2\pi i g(2\pi i z)}{2\pi i z} z^{-2k} = \frac{g(2\pi i z)}{z^{2k+1}}$$

et en utilisant le développement en série entière de la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned} H(z)z^{-2k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi i z)^n z^{-2k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n (2\pi)^n i^n}{n!} z^{n-2k-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$c_k = \text{Res}(H(z)z^{-2k}; 0) = \frac{B_{2k} (2\pi)^{2k} (-1)^k}{(2k)!}$$

et finalement,

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} (2\pi)^{2k}}{(2k)!} \frac{B_{2k}}{2}.$$

Pour $k = 1$, ceci donne

$$\zeta(2) = \frac{(-1) \times (2\pi)^2}{2!} \frac{B_2}{2} = -\pi^2 B_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$