

Analyse numérique pour la diffraction à haute fréquence

16 mars 2026

Objectifs

Durant les 3x3h de séances “numériques”, nos **objectifs** seront les suivants :

1. Mettre en oeuvre numériquement les *méthodes asymptotiques* vues dans la partie théorique ; optique géométrique, optique physique, correction en zone d’ombre etc. Remarque : pas de résultat de convergence / d’estimation d’erreurs dans la partie “asymptotique” → comment juger de la qualité de ces méthodes ? L’optique physique est-elle vraiment plus précise que l’optique géométrique ? méthode ? Comment/où/à quel point la correction des rayons rampants en zone d’ombre améliore-t-elle l’approximation ?
2. Etudier une *méthode numérique* de référence (FEM) pour le calcul numérique (non-asymptotique). But double : voir les difficultés en temps de calcul (d’un point de vue à la fois théorique et pratique) et fournir une solution de référence pour évaluer les méthodes asymptotiques ci-dessus (et donc répondre en partie à ces questions).
3. Si le temps le permet, nous verrons comment effectuer des simulations à plus haute fréquence avec BEM (accélération et préconditionnement).

Remarque : cette année, le cours connaît une transition avant la reprise des maquettes en 2027. Avec Éric Lunéville, la partie numérique proposait le développement d’une méthode hybride pour combiner les méthodes asymptotiques à des méthodes numériques standard pour traiter les petites (devant la longueur d’onde) parties de l’objet diffractant. Nous ne développerons pas cela cette année.

Le **déroulement des séances** est le suivant

1. Séance 1 : Analyse de l’approximation de Galerkin à haute-fréquence, effet de pollution. Introduction à FreeFem++
2. Séance 2 : Suite et fin sur les éléments finis, méthode de la PML, travail par groupe sur les projets (voir plus bas)
3. Séance 3 : Si assez de temps, la méthode BEM, accélération et préconditionnement. Introduction éventuelle à FreeFem++ ou Xlife++ pour les BEM.

L’évaluation pour cette partie du cours se fera à travers un **projet** en groupes de 2 ou 3, avec un rendu de code accompagné d’un rapport pour expliquer ce que fait le code. Voici les **attendus** pour le projet :

1. Il doit contenir une implémentation *personnelle, complète* et *efficace* d’une méthode asymptotique pour le calcul de problèmes de diffraction (avec au moins l’optique géométrique).
2. Il doit contenir une partie de *validation* où l’erreur de la méthode asymptotique est calculée en fonction de la fréquence et/ou autres paramètres pertinents.
3. Pour la validation, on pourra utiliser des logiciels libres comme FreeFem++, Xlife++, Bem++, etc.
4. Le rapport peut très bien être concis. Il doit expliquer ce que fait votre code, et donner les aspects mathématiques justifiant les choix faits dans l’implémentation. Il doit aussi contenir des figures montrant des résultats de calculs effectués par votre programme.

Table des matières

1	Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence	7
1	Deux résultats d'analyse fonctionnelle	7
1.1	Hypothèses générales pour les opérateurs de Helmholtz	8
2	Approximation de Galerkin	14
2.1	Lemme de Céa	15
3	Régime asymptotique : l'argument de Schatz	16
2	Méthode de la couche parfaitement adaptée de Bérenger	21
1	Introduction	21
2	Preliminaires sur le problème de diffraction	21
3	Étude de la méthode de Bérenger	28
3.1	Construction de la couche parfaitement adaptée	28
3.2	Formulation variationnelle de l'équation de Bérenger	31
4	Décroissance exponentielle des solutions de Bérenger	35
5	Troncature du problème de Bérenger	37

Introduction

Dans ce qui suit, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, où $d = 2$ ou 3 , désigne un “obstacle” ouvert borné de frontière *Lipschitzienne*¹, dont le complémentaire

$$\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$$

est supposé *connexe*. On note $u^{\text{inc}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ un “champ incident”, comme par exemple une *onde plane* $u^{\text{inc}} = e^{ikx_1}$, et on note $g = -u^{\text{inc}}|_{\partial\Omega}$. Le *problème de diffraction de u^{inc} par Ω* consiste à chercher une fonction u dans l’espace

$$H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) = \{u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) \mid u|_{B_\rho \cap \Omega^{\text{ext}}} \in H^1(B_\rho \cap \Omega^{\text{ext}}) \text{ pour tout } \rho \text{ tel que } \Omega \subset B_\rho\},$$

solution de

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2)u &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} \\ u &= g & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_r u - iku &= o(r^{-\frac{d-1}{2}}) & \text{uniformément pour } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (0.1)$$

Dans la première équation de (0.1), l’opérateur $-\Delta - k^2$ est compris au sens des distributions : on demande que pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}} u \cdot (-\Delta\phi - k^2\phi) dx = 0.$$

Par régularité elliptique intérieure, une fonction $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ vérifiant cette propriété est infiniment différentiable en tout point de Ω^{ext} (voir par exemple [19, Théorème 4.16]). La seconde équation est une égalité des traces, et garde un sens pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.² Elle assure que le champs total, somme du champs incidé et du champ diffracté, $u^{\text{tot}} = u + u^{\text{inc}}$, s’annule sur $\partial\Omega$. Enfin, la dernière égalité, connue sous le nom de *condition de radiation de Sommerfeld* [25], signifie plus précisément

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(\sup_{|x| \geq r} r^{(d-1)/2} |\partial_r u - iku| \right) = 0.$$

On dit qu’une solution de $(\Delta + k^2)u = 0$ vérifiant cette condition est une *onde sortante*.

1. Tout point de $\partial\Omega$ admet un voisinage U dans lequel, après rotation et translation éventuelles, $\Omega \cap U$ coïncide avec l’hypographe $\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : x_n < f(x')\}$ d’une certaine fonction Lipschitzienne $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$.

2. On rappelle que pour un ouvert U de frontière compacte Lipschitzienne, il existe un unique opérateur linéaire borné $\gamma : H^1(U) \rightarrow L^2(\partial U)$, appelée l’opérateur de *trace*, coïncidant avec l’opérateur de restriction $u \mapsto u|_{\partial U}$ pour $u \in C^\infty(\overline{U}) \cap H^1(U)$, voir [19, Théorème 3.37]. L’image de cet opérateur, $\gamma(H^1(U))$, est notée $H^{1/2}(\partial U)$.

Théorème 0.1. *Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitzien dont le complémentaire est connexe, et pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe une unique fonction $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ vérifiant (0.1).*

Une référence classique pour la démonstration est [19, Théorème 9.11], voir aussi [9, Théorème 3.21] pour une démonstration sous l’hypothèse d’un bord $\partial\Omega$ plus régulier, avec une donnée g continue.

Cette partie du cours aborde des méthodes pour calculer, dans un voisinage borné de l’obstacle, une approximation de l’unique solution u de (0.1), à partir de la donnée au bord g . Les résultats ci-dessous s’étendent au cas de coefficients variables (i.e., remplacer $\Delta + k^2$ par $\text{div}(A(x)\nabla \cdot) + k^2 n(x)$, avec $A(x)$ et $n(x)$ des fonctions C^∞ bornées et $A(x) \equiv I_{d \times d}$, $n \equiv 1$ hors d’un compact), ainsi que des conditions de Neumann ou Robin.

Dans le premier chapitre, nous présentons un cadre abstrait pour formuler les résultats généraux d’approximation variationnelle sous 5 hypothèses générales : (i) continuité, (ii) inégalité de Gårding, (iii) Compacité, (iv) Injectivité, et (v) régularité elliptique. La présentation est largement tiré du récent article [13], et reprend presque à l’identique les deux premiers chapitres de ces notes de cours https://martinaverseng.perso.math.cnrs.fr/sca_fem_helmholtz.pdf.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la méthode de la couche parfaitement adaptée de Bérenger, qui permet de ramener le problème de diffraction (0.1) à un domaine borné pour se ramener dans le cadre précédent, afin d’appliquer la méthode des éléments finis.

Enfin, si le temps le permet, nous aborderons dans un dernier chapitre les méthodes de résolution de (0.1) par équations intégrales (qui elles, nécessitent des coefficients constants).

Ces notes sont en cours de rédaction, elles sont donc incomplètes et sans doute truffées d’erreurs/imprécisions/coquilles, que vous pouvez signaler sans hésiter en envoyant un email à martin.averseng@univ-angers.fr.

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

1 Deux résultats d'analyse fonctionnelle

Nous rappelons deux résultats abstraits d'analyse fonctionnelle qui vont jouer un rôle crucial dans ce qui va suivre. Le premier est le théorème de Lax-Milgram [17] :

Théorème 1.1 (Théorème de Lax-Milgram (1954))

Soit V un espace de Hilbert et $B : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ une *forme sesquilinéaire bornée*, i.e. $u \mapsto B(u, v)$ est linéaire, $v \mapsto B(u, v)$ est anti-linéaire, et

$$\exists C > 0 : \forall (u, v) \in V \times V, \quad |B(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V$$

De plus, on suppose que B est *coercive*, au sens où

$$\exists \alpha > 0 : \forall u \in V, \quad \operatorname{Re}(B(u, u)) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

Alors, pour toute forme anti-linéaire continue $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, il existe une unique solution $u \in V$ au problème variationnel

$$\forall v \in V, \quad B(u, v) = f(v). \quad (1.1)$$

Le second est un résultat portant sur les opérateurs de Fredholm d'indice 0.¹ Étant donnés deux espaces de Hilbert H_1 and H_2 , on rappelle qu'un opérateur linéaire borné $K : H_1 \rightarrow H_2$ est dit *compact* si, pour tout suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H_1 , il existe une sous-suite de $(Ku_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans H_2 .

Théorème 1.2 (Opérateurs de Fredholm d'indice 0)

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert, $A_0 : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné et $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur *compact*. On suppose de plus que

(i) A_0 est un isomorphisme

(ii) $A_0 + K$ est injectif

Alors $A_0 + K$ est un isomorphisme.

1. Le célèbre livre [15] de Tosio Kato contient un traitement général de ces opérateurs au Chapitre IV, §5. Une présentation plus élémentaire peut être trouvée dans [24, Chapter 5].

1.1 Hypothèses générales pour les opérateurs de Helmholtz

Espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_k^1$ et formes sesquilineaires a_k . Nous commençons par introduire

$$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}), (\mathcal{H}^1, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^1})$$

deux espaces de Hilbert, vérifiant l'inclusion $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}$ supposée *dense* (pour tout $u \in \mathcal{H}$, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{H}^1$ qui converge vers u dans norme de $\mathcal{H}$). Le produit scalaire de $\mathcal{H}$ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, ou simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On se donne aussi pour tout $k > 0$ une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_k^1}$ équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$, et on note $\mathcal{H}_k^1$ l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^1$ équipé de cette norme. Pour tout $k > 0$, on suppose que

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_k^1} \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{H}_k^1.$$

Enfin, on se donne pour chaque $k > 0$ une forme sesquilineaire

$$a_k : \mathcal{H}_k^1 \times \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est supposée *bornée*, i.e.,

$$\|a_k\| := \sup_{u,v \in \mathcal{H}_k^1 \setminus \{0\}} \frac{|a_k(u,v)|}{\|u\|_{\mathcal{H}_k^1} \|v\|_{\mathcal{H}_k^1}} < \infty.$$

Exemple. Etant donné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, on peut par exemple choisir

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad \mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 = k^{-2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et poser

$$a_k(u,v) := \int_{\Omega} k^{-2} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} - u \overline{v} \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Ceci correspond à la formulation variationnelle de

$$(-k^{-2} \Delta - 1)u = f \quad \text{sur } \Omega,$$

i.e., l'équation de Helmholtz multipliée par k^{-2} (quitte à renommer le second membre), avec des conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Dans ce qui suit, nous ferons souvent référence à cet exemple en l'appelant “l'exemple canonique”.

Lorsque nous appliquerons le formalisme de ce chapitre à la méthode des éléments finis pour l'équation de Helmholtz à haute fréquence, le fait de “compenser” les dérivées par des puissances de k est utile pour donner une forme plus simple à la plupart des énoncés, dans lesquels on décrit le comportement de l'erreur de manière *uniforme en k* .²

2. Une raison intuitive de considérer cette norme est que pour une onde plane e^{ikx} , les deux termes ont environ le même poids, et la norme est d'ordre 1.

Anti-dual et adjoint Plusieurs des démonstrations qui vont suivre utilisent des “arguments de dualité”. Nous rappelons ici les définitions nécessaires. Étant donné un espace de Hilbert H , l'espace H^* désigne l'*anti-dual* de H , c'est-à-dire, l'espace des formes anti-linéaires³ $\ell : H \rightarrow \mathbb{C}$, muni de la norme

$$\|\ell\|_{H^*} := \sup_{u \in H} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|_H},$$

qui en fait un espace de Hilbert. On notera $\langle \ell, u \rangle_{H^*, H} := \ell(u)$. Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un opérateur linéaire borné, l'*adjoint* de A est l'unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H_2^*, H_1^*)$ vérifiant

$$\langle A^*u, v \rangle_{H_2^*, H_2} = \langle u, Av \rangle_{H_1^*, H_1}.$$

Les espaces de Hilbert étant réflexifs, on peut identifier H à son (anti-)bidual $(H^*)^*$, et selon cette identification, on a $A = (A^*)^*$ et

$$\langle Au, v \rangle_{H_2, H_2^*} = \langle u, A^*v \rangle_{H_1, H_1^*}$$

pour tout $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $u \in H_1$ et $v \in H_2^*$. On adopte aussi la notation

$$\|T\|_{H_1 \rightarrow H_2} := \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}}.$$

Identification On note $\mathcal{H}_k^{-1} := (\mathcal{H}_k^1)^*$. Comme on y est habitué pour les distributions, on peut voir $u \in \mathcal{H}$ comme un élément de $\mathcal{H}_k^{-1}$, agissant sur un élément de $v \in \mathcal{H}_k^1$ via

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}_k^{-1}, \mathcal{H}_k^1} := \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'injectivité obtenue dans l'exercice 1.2 ci-dessous (qui repose sur la densité de l'inclusion $\mathcal{H}_k^1 \subset \mathcal{H}$) montre que l'on peut ainsi identifier $\mathcal{H}$ à un sous-espace de $\mathcal{H}_k^{-1}$. Par conséquent, nous pourrions aussi noter $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité de $\mathcal{H}_k^{-1}, \mathcal{H}_k^1$. Selon cette identification, on a les inclusions

$$\mathcal{H}_k^{-1} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k^1.$$

Il est utile de voir $\mathcal{H}_k^{-1}$ comme un espace contenant des fonctions “moins régulières” (il leur manque une “dérivée” pour être dans $\mathcal{H}$), et $\mathcal{H}_k^1$, des fonctions “plus régulières” (qui possèdent une “dérivée” dans $\mathcal{H}$). Un opérateur $P : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$, comme l'opérateur de Helmholtz introduit au paragraphe suivant, correspond ainsi à un opérateur qui “dérive deux fois”.

L'opérateur $P(k)$. Nous pouvons maintenant définir l'opérateur de Helmholtz $P(k) : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$, l'opérateur associé à la forme sesquilinéaire a_k :

3. $f(\lambda u + v) = \bar{\lambda}f(u) + f(v)$

Définition 1.1 (Opérateur de Helmholtz)

Pour tout $k > 0$, l'opérateur de Helmholtz $P(k) : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$ est défini par

$$\langle P(k)u, v \rangle := a_k(u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_k^1.$$

Etant donné $f \in \mathcal{H}_k^{-1}$, le problème de Helmholtz est de trouver $u \in \mathcal{H}_k^1$ tel que

$$P(k)u = f. \quad (1.3)$$

Observons que d'après ces définitions,

$$\|P(k)\|_{\mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k} = \|a_k\|,$$

et en “testant par $v \in \mathcal{H}_k^1$ ” dans l'équation (1.3), on arrive à la formulation variationnelle équivalente

$$\text{Trouver } u \in \mathcal{H}_k^1 \text{ tel que pour tout } v \in \mathcal{H}_k^1, \quad a_k(u, v) = \langle f, v \rangle. \quad (1.4)$$

Exercice 1.1. ($P(k)$ dans l'exemple canonique).

Vérifier que dans l'exemple canonique (1.2), on a

$$P(k)u = (-k^{-2}\Delta - 1)u \quad \text{pour tout } u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Hypothèses Nous introduisons les quatre hypothèses fondamentales suivantes.

Hypothèse 1.3 (Continuité k -uniforme)

Les formes sesquilinéaires $(a_k)_{k>0}$ sont bornées uniformément en k : pour tout $k_0 > 0$, il existe une constante $C_0(k_0) > 0$ telle que

$$\|a_k\| \leq C_0(k_0), \quad \text{pour tout } k \geq k_0. \quad (1.5)$$

Hypothèse 1.4 (Inégalité de Gårding)

Pour tout $k_0 > 0$, il existe deux constantes $c_{\text{Ga}}(k_0), C_{\text{Ga}}(k_0) > 0$ telles que l'inégalité de Gårding

$$\text{Re}(a_k(u, u)) \geq c_{\text{Ga}}(k_0)\|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 - C_{\text{Ga}}(k_0)\|u\|_{\mathcal{H}}^2$$

soit satisfaite pour tout $k \geq k_0$ et pour tout $u \in \mathcal{H}_k^1$.

Hypothèse 1.5 (Injection compacte)

L'inclusion $\mathcal{H}_k^1 \subset \mathcal{H}$ est *compacte*, c'est-à-dire que toute suite bornée dans $\mathcal{H}_k^1$ admet une sous-suite qui converge dans la norme $\mathcal{H}$.

Hypothèse 1.6 (Injectivité)

Pour tout $k > 0$, si $u \in \mathcal{H}_k^1$ vérifie $a_k(u, v) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{H}_k^1$, alors $u = 0$.

Sauf mention contraire, on suppose que ces hypothèses sont vérifiées dans le reste de ce chapitre.

Exercice 1.2. (Identification $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_k^{-1}$).

Montrer que les applications $I_0 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$, $I_1 : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$, définies par

$$\langle I_0 u, v \rangle_{\mathcal{H}_k^{-1}, \mathcal{H}_k^1} := \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall (u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_k^1,$$

$$\langle I_1 u, v \rangle_{\mathcal{H}_k^{-1}, \mathcal{H}_k^1} := \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall (u, v) \in \mathcal{H}_k^1 \times \mathcal{H}_k^1,$$

sont injectives et vérifient $\|I_0\| \leq 1$ et $\|I_1\| \leq 1$. Démontrer que de plus sous l'hypothèse (1.5), I_1 est compacte. (Bonus : sous cette hypothèse, montrer que I_0 est également compacte).

Sous ces hypothèses, le problème de Helmholtz admet une unique solution :

Théorème 1.7 ($P(k)$ est un isomorphisme)

Sous les hypothèses (1.3)–(1.6), l'opérateur $P(k) : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$ est un isomorphisme pour tout $k > 0$.

Démonstration. Soit $k_0 > 0$ et soient c_{Ga} et C_{Ga} des constantes comme dans l'hypothèse 1.4. Notons a_k^+ la forme sesquilinéaire

$$a_k^+(u, v) := a_k(u, v) + m \langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}.$$

où $m > C_{\text{Ga}}$. D'après l'hypothèse 1.3,

$$|a_k^+(u, v)| \leq (C_0 + m) \|u\|_{\mathcal{H}_k^1} \|v\|_{\mathcal{H}_k^1}$$

et d'après l'hypothèse 1.4,

$$\operatorname{Re}(a_k^+(u, u)) \geq c_{\text{Ga}} \|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2; \quad (1.6)$$

ainsi, a_k^+ est continue et coercive. D'après le théorème de Lax-Milgram, pour toute forme anti-linéaire continue $f : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathbb{C}$, il existe donc un unique $u \in \mathcal{H}_k^1$ tel que

$$a_k^+(u, v) = f(v). \quad (1.7)$$

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

En notant $P^+(k) = P(k) + mI_1$, où I_1 est l'application définie dans l'exercice 1.2, on a

$$a_k^+(u, v) = \langle P^+(k)u, v \rangle$$

et donc l'existence-unicité dans le problème variationnel (1.7) se traduit par le fait que pour tout f , il existe un unique u tel que $P^+(k)u = f$: autrement dit, $P^+(k)$ est bijectif. De plus, on vérifie que $\|P^+(k)\| = \|a_k^+\| \leq (C_0 + m)$, et d'après (1.6),

$$\begin{aligned} \|[P^+(k)]^{-1}u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 &\leq \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \operatorname{Re} \left\{ a_k^+ \left([P^+(k)]^{-1}u, [P^+(k)]^{-1}u \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \operatorname{Re} \left\langle P^+(k)[P^+(k)]^{-1}u, [P^+(k)]^{-1}u \right\rangle \\ &= \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \operatorname{Re} \langle u, [P^+(k)]^{-1}u \rangle \\ &\leq \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \|u\|_{\mathcal{H}_k^{-1}} \|[P^+(k)]^{-1}u\|_{\mathcal{H}_k^1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|[P^+(k)]^{-1}\|_{\mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k^1} \leq c_{\text{Ga}}^{-1}$. Ainsi, $P^+(k)$ est un isomorphisme.

Or, $P(k)$ diffère de $P^+(k)$ par l'opérateur mI_1 qui, grâce à l'hypothèse 1.5, est compact (voir l'exercice (1.2)), et d'autre part, l'hypothèse 1.6 assure que $P(k)$ est injectif. D'après le Théorème 1.2, $P(k)$ est donc un isomorphisme. $\square$

Définition 1.2 (Résolvante $R(k)$)

Pour tout $k > 0$, la *résolvante* $R(k)$ de l'opérateur de Helmholtz est définie par

$$R(k) =: P(k)^{-1} : \mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k^1,$$

et on note

$$\rho(k) := \|R(k)\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}} = \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|R(k)f\|_{\mathcal{H}}}{\|f\|_{\mathcal{H}}}.$$

Remarque 1.1. Faisons ici quelques commentaires importants :

1. On a défini $\rho(k)$ comme la norme de $R(k)$ mesurée de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$, mais l'exercice 1.4 montre qu'on aurait pu prendre cette norme de $\mathcal{H}_k^{-1}$ dans $\mathcal{H}_k^1$ sans changer fondamentalement la définition.
2. La quantité $\rho(k)$ mesure en quelque sorte la *difficulté* à résoudre le problème de Helmholtz $P(k)u = f$. En effet, si l'on trouve une fonction $\hat{u}(k)$ ⁴ qui vérifie

4. via, par exemple, la méthode de l'optique géométrique, où l'on cherche $\hat{u}$ sous forme d'un "ansatz WKB"

$$\hat{u}(k) = e^{ikS}(a_0 + k^{-1}a_1 + \dots).$$

En injectant cet ansatz dans l'équation $P(k)\hat{u} - f = 0$ et en résolvant formellement pour que les termes devant chaque puissance de k s'annulent, on obtient que S est solution d'une équation non-linéaire nommée "équation eikonale" et les amplitudes $a_0, a_1, \dots$ vérifient une cascade d'équation dites de transport.

l'équation à une erreur $\varepsilon(k)$ près,

$$P(k)\hat{u} = f + \varepsilon(k)$$

alors, en soustrayant $P(k)u = f$, on voit que

$$\hat{u} - u = R(k)P(k)(\hat{u} - u) = R(k)\varepsilon(k) = O(\rho(k)\|\varepsilon(k)\|).$$

Le nombre $\rho(k)$ va donc “amplifier” l'erreur commise sur la résolution de l'équation.

3. L'exercice 1.3 montre que pour essentiellement n'importe quel problème de Helmholtz, on a $\rho(k) \geq Ck$ pour une certaine constante $C > 0$. Ainsi, pour obtenir une convergence vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$, il faut au minimum avoir $\varepsilon(k) = o(k^{-1}) \rightarrow$ on s'attend donc à devoir pousser le développement de l'amplitude dans la méthode de l'optique géométrique à l'ordre **au moins** 1 (pour avoir une erreur en $O(k^{-2})$) !
4. Dans des problèmes de Helmholtz concrets comme (0.1), il existe un lien profond entre le comportement de $\rho(k)$ et celui des “rayons” apparaissant dans l'optique géométrique. Par exemple, on aura essentiellement $\rho(k) = O(k)$ ⁵ si et seulement si aucun rayon ne reste piégé dans un compact, ce qui est notamment le cas si l'obstacle Ω est convexe. On dit que le problème est **non captant**. En revanche, s'il existe des rayons “piégés” (par exemple en présence de cavités), alors $\rho(k) \gg k$, et il peut arriver que $\rho(k_n) \sim e^{ck_n}$ pour une certaine suite de fréquences $k_n \rightarrow \infty$. Une discussion de ces résultats et des références peuvent être trouvées dans le troisième chapitre des notes de cours https://martinaverseng.perso.math.cnrs.fr/sca_fem_helmholtz.pdf.

Exercice 1.3. (Minoration de $\rho(k)$).

Dans cet exercice, on montre que si l'opérateur $P(k)$ correspond, au moins sur une petite région U , à l'opérateur $-k^{-2}\Delta - 1$, alors la résolvante $\rho(k)$ croît au moins linéairement en fonction de k . Pour ce faire, on note $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide, et on suppose que $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, et qu'il existe $U \subset \Omega$ un ouvert tel que $C_c^\infty(U) \subset \mathcal{H}_k^1$ et pour tout $u, v \in C_c^\infty(U)$,

$$a_k(u, v) = \int_U \left\{ k^{-2} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} - u \overline{v} \right\} dx.$$

1. Montrer que pour tout $u \in C_c^\infty(U)$, $P(k)u = -k^{-2}\Delta u - u$.
2. Montrer qu'il existe $C_d > 0$ dépendant seulement de la dimension d , tel que pour tout $k > 0$, il existe $u(k) \in C_c^\infty(U)$ vérifiant

$$\|P(k)u(k)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_d}{\langle kR \rangle} \|u(k)\|_{L^2(\Omega)}$$

où R est le rayon d'une boule contenue dans U , et $\langle \cdot \rangle$ est le “crochet Japonais”, défini par $\langle X \rangle := (1 + \|X\|^2)^{1/2}$.

3. En déduire que $\rho(k) \geq \frac{\langle kR \rangle}{C_d}$.

5. Pour définir $\rho(k)$, nous devons d'abord nous ramener à un problème borné, voir le chapitre suivant.

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

Exercice 1.4. (Norme de $R(k)$ de $\mathcal{H}_k^{-1}$ dans $\mathcal{H}_k^1$).

Montrer que pour tout $k_0 > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$\|R(k)\|_{\mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k^1} \leq C(1 + \rho(k)).$$

Indication : utiliser l'inégalité de Gårding. Commencer par montrer que $\|R(k)\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k^1} \leq C(1 + \rho(k))$.

2 Approximation de Galerkin

On a vu que l'équation $P(k)u = f$ est équivalente au problème variationnel (1.4). La méthode de Galerkin⁶ consiste à résoudre le même problème variationnel, mais dans un sous-espace $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$:

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h, \quad a_k(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle.$$

En soustrayant (1.4) et en utilisant que $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$, on voit alors que u_h vérifie la propriété

$$a_k(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

Nous prenons cela comme une définition de u_h :

Définition 1.3 (Approximation de Galerkin)

Soit $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$ un sous-espace vectoriel *fermé* de $\mathcal{H}_k^1$ (le plus souvent, de dimension finie). Pour tout $u \in \mathcal{H}_k^1$, on dit que $u_h \in V_h$ est une *approximation de Galerkin* de u dans V_h si l'erreur $u - u_h$ vérifie l'*orthogonalité de Galerkin*

$$a_k(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h. \quad (1.8)$$

Notons que par définition de $P(k)$, l'orthogonalité de Galerkin s'écrit aussi, de manière équivalente,

$$\langle P(k)(u - u_h), v_h \rangle = 0 \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

Remarque 1.2 (Calcul pratique de u_h). Si V_h est de dimension finie égale à N , on peut calculer u_h en pratique comme suit : en introduisant une base $B = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ de V_h , u_h est une approximation de Galerkin de u si et seulement si le vecteur U_h de ses coefficients dans la base B est solution du système linéaire

$$AU_h = F$$

où $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ et $F \in \mathbb{R}^N$ sont définis par $A_{i,j} = a_k(\phi_j, \phi_i)$ et $F_i = \langle f, \phi_i \rangle$ (en supposant que $a_k(u, v) = \langle f, v \rangle$). En pratique, les coefficients de A et de F sont calculés

6. du nom de Boris G. Galerkin, qui a proposé cette idée en 1915 dans un article à propos des équations de l'élasticité [11]

automatiquement par ordinateur, et si le système linéaire est inversible, le vecteur U_h peut être obtenu par inversion via la méthode de Gauss, ou toute autre algorithmes de résolution d'un système linéaire. Cette inversion devient souvent coûteuse en temps de calcul lorsque la dimension N de V_h est grande, notamment parce que la matrice A est non-hermitienne et indéfinie en général.

À ce stade, rien ne garantit l'existence ou l'unicité d'une approximation de Galerkin de u , et même si c'est le cas, cela ne saute pas forcément aux yeux que $u - u_h$ devrait forcément être petit. Dans ce qui va suivre, le but du jeu sera de montrer que l'orthogonalité (1.8) force, sous les bonnes conditions, u_h à être presque la meilleure approximation de u qui existe dans V_h , en norme $\mathcal{H}_k^1$. L'exercice suivant montre déjà une condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité de u_h :

Exercice 1.5. (Existence et unicité d'une approximation de Galerkin).

Soit $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$ un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La seule approximation de Galerkin de $u = 0$ dans V_h est $u_h = 0$.
- (ii) Pour tout $u \in \mathcal{H}_k^1$, il existe une unique approximation de Galerkin u_h de u dans V_h .

(indication : commencer par le cas où V_h est de dimension finie).

2.1 Lemme de C  a

Le lemme suivant, d   à C  a [10], montre le mécanisme le plus simple permettant d'obtenir une majoration de $u - u_h$ en norme $\mathcal{H}_k^1$.

Lemme 1.8 (C  a, 1964)

On suppose que la forme sesquil  aire a_k vérifie

$$\gamma(a_k) := \inf_{u \in \mathcal{H}_k^1} \frac{|a_k(u, u)|}{\|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2} > 0. \quad (1.9)$$

Alors quelque soit le sous-espace fermé $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$, toute fonction $u \in \mathcal{H}_k^1$ admet une unique approximation de Galerkin u_h dans V_h , et l'erreur $u - u_h$ vérifie l'estimation

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \leq \frac{\|a_k\|}{\gamma(a_k)} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1}. \quad (1.10)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que si une approximation de Galerkin $u_h \in V_h$ existe, alors elle vérifie l'estimation (1.10) ; en effet, appliquée à $u = 0$, cette estimation implique que $u_h = 0$, et l'existence et l'unicité pour tout u découlent de l'exercice 1.5.

Si une approximation de Galerkin u_h existe, alors pour tout $v_h \in V_h$, l'orthogonalité

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

de Galerkin (1.8) implique que

$$\begin{aligned} a_k(u - u_h, u - u_h) &= a_k(u - u_h, u - v_h) + \underbrace{a_k(u - u_h, \overbrace{v_h - u_h}^{\in V_h})}_{=0} \\ &= a_k(u - u_h, u - v_h). \end{aligned}$$

Cette égalité et la définition de $\gamma(a_k)$ impliquent

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 &\leq \frac{1}{\gamma(a_k)} a_k(u - u_h, u - u_h) \\ &= \frac{1}{\gamma(a_k)} a_k(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq \frac{\|a_k\|}{\gamma(a_k)} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \end{aligned}$$

et l'estimation (1.10) découle de ceci en simplifiant par $\|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}$, puis en passant à l'infimum pour $v_h \in V_h$. $\square$

Remarque 1.3. 1. Ce résultat montre que $u - u_h$ doit être au moins aussi petit (à une constante près) que $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$. Autrement dit, u_h est donc presque “imbattable” parmi la catégorie des compétiteurs dans V_h – on dit que u_h est **quasi-optimal**.

2. Si en plus la constante $\gamma(a_k)$ est indépendante de k , on obtient une propriété extrêmement forte de **quasi-optimalité uniforme en k** : la constante devant l'infimum deviendrait $O(1)$ lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui assurerait que l'écart entre u_h et la meilleure approximation dans V_h n'explose pas quand $k \rightarrow \infty$.
3. Le principal problème du lemme de Céa est qu'il repose sur une hypothèse qui ne sera *jamais* vérifiée par des problèmes de Helmholtz concrets pour k suffisamment grand, comme le montre l'exercice 1.6 ci-dessous.

Exercice 1.6. (Caractère indéfini de a_k).

On fait les mêmes hypothèses que dans l'exercice 1.3. Montrer que pour k suffisamment grand, il existe deux fonctions $u_1, u_2 \in C_c^\infty(U)$ à valeurs réelles telles que

$$a_k(u_1, u_1) < 0 < a_k(u_2, u_2).$$

En déduire que $\gamma(a_k) = 0$ pour k suffisamment grand.

3 Régime asymptotique : l'argument de Schatz

Bien que l'hypothèse (1.9) du lemme de Céa ne soit pas satisfaite en général, l'inégalité de Gårding signifie que a_k est “presque coercive”, modulo une perturbation compacte. Dans cette section, nous présentons un argument dû à Schatz [23] qui exploite ce fait pour obtenir une estimation de l'erreur $u - u_h$. Pour ce faire, il est utile d'introduire la notation ci-dessous, en suivant l'exemple de [22].

Définition 1.4 (Constante d'approximabilité de l'adjoint)

Soit $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$ un sous-espace fermé. Pour tout $k > 0$, la *constante d'approximabilité de l'adjoint*, $\eta(k, V_h)$, est définie par

$$\eta(k, V_h) := \|(\text{Id} - \Pi_h)R(k)^*\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_k^1}$$

où $\Pi_h : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^1$ est la projection $\mathcal{H}_k^1$ -orthogonale sur V_h et $R(k)^* : \mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k^1$ est l'adjoint de $R(k)$.

Notons que V_h est un convexe (car c'est un espace vectoriel) fermé, et donc l'opérateur Π_h est bien défini puisque $\mathcal{H}_k^1$ est un espace de Hilbert. De plus, on a la propriété classique

$$\|(\text{Id} - \Pi_h)u\|_{\mathcal{H}_k^1} = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1} = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1}.$$

Théorème 1.9 (Schatz, 1974)

Soit $k_0 > 0$. Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, et quelque soit le sous-espace fermé $V_h \subset \mathcal{H}_k^1$, si

$$\eta(k, V_h) \leq \eta_0 \tag{1.11}$$

alors toute fonction $u \in \mathcal{H}_k^1$ admet une unique approximation de Galerkin u_h , et l'erreur $u - u_h$ vérifie les inégalités

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \eta(k, V_h) \|a_k\| \cdot \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \tag{1.12}$$

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq 2 \frac{\|a_k\|}{c_{\text{Ga}}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1}. \tag{1.13}$$

Remarque 1.4. 1. L'inégalité (1.13) donne la quasi-optimalité uniforme en k , à condition de payer le “ticket d'entrée” $\eta(k, V_h) \leq \eta_0$. Lorsque cette condition est vérifiée, on dit qu'on est dans le régime “asymptotique”, *i.e.*, le régime où l'approximation de Galerkin est essentiellement la meilleure approximation possible dans V_h .

2. Vu la définition de $\eta(k, V_h)$, la condition (1.11) impose à l'espace V_h d'être suffisamment riche pour contenir des approximations assez précises de l'équation adjointe $P(k)^*u' = f'$, et ce, pour **n'importe quel** $f' \in \mathcal{H}$. On peut donc imaginer des situations où V_h contient une excellente approximation de la solution u qui nous intéresse (ce qui rend le second membre de (1.13) très petit), mais n'approche pas bien certaines solutions u' d'un problème adjoint. Dans ce cas, l'approximation de Galerkin pourrait être très loin de u . On appelle cela **l'effet de pollution** : les erreurs sur le problème adjoint viennent en quelque sorte “polluer” l'approximation de Galerkin.
3. Pour des espaces d'éléments finis de Lagrange de degré 1 sur un maillage de Ω , la régularité elliptique (qui fait que $R^*(k)f$ est “deux crans” plus régulier que f ,

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

donc dans $H^2(\Omega)$ pour $f \in L^2(\Omega)$) et les propriétés standard d'approximations polynomiale dans les espaces de Sobolev (voir par exemple [5]) impliquent que $\eta(k, V_h)$ est de l'ordre de $(hk)\rho(k)$, où h est le pas du maillage (pour plus de détails sur ce point, voir le Chapitre 2 du cours cité plus haut). Or comme le montre l'exercice 1.3, on a toujours au moins $\rho(k) \geq Ck$: le prix du ticket d'entrée est donc au moins

$$hk^2 \text{ suffisamment petit.}$$

Ainsi, pour obtenir le régime asymptotique, on est obligé d'utiliser un maillage avec $h \leq \frac{C}{k^2}$, ce qui, à haute fréquence, est **beaucoup plus petit** que $h \approx \frac{1}{k}$, seuil auquel on aurait pu s'attendre pour approcher des fonctions oscillant à la longueur d'onde $\frac{1}{k}$.

Démonstration. Comme dans la démonstration du lemme de Céa, il suffit donc de montrer les deux inégalités (1.12) et (1.13). On procède en deux étapes :

1. On commence par écrire

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle u - u_h, u - u_h \rangle \\ &= \langle R(k)P(k)(u - u_h), u - u_h \rangle \\ &= \langle P(k)(u - u_h), R(k)^*(u - u_h) \rangle \\ &= \langle P(k)(u - u_h), R(k)^*(u - u_h) - v_h \rangle \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la dualité et l'orthogonalité de Galerkin pour retrancher un élément arbitraire $v_h \in V_h$ dans l'argument de droite du crochet de dualité. En prenant $v_h = \Pi_h R(k)^*(u - u_h)$ (qui est bien un élément de V_h puisque $\text{Im}(\Pi_h) = V_h$), on en déduit que

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|a_k\| \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \|(\text{Id} - \Pi_h)R(k)^*(u - u_h)\| \\ &\leq \|a_k\| \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \cdot \eta(k, V_h) \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

par définition de $\eta(k, V_h)$, ce qui implique immédiatement (1.12).

2. D'après l'inégalité de Gårding et l'inégalité (1.12) que nous venons de montrer, et en utilisant l'hypothèse $\eta(k, V_h) \leq \eta_0$,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 &\leq \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \text{Re} (a_k(u - u_h, u - u_h)) + \frac{C_{\text{Ga}}}{c_{\text{Ga}}} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{1}{c_{\text{Ga}}} \text{Re} (a_k(u - u_h, u - v_h)) + \frac{C_{\text{Ga}}}{c_{\text{Ga}}} \eta(k, V_h)^2 \|a_k\|^2 \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 \\ &\leq \frac{\|a_k\|}{c_{\text{Ga}}} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1} + \frac{C_{\text{Ga}}}{c_{\text{Ga}}} \eta_0^2 \|a_k\|^2 \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}^2, \end{aligned}$$

3 Régime asymptotique : l'argument de Schatz

où on a de nouveau utilisé l'orthogonalité de Galerkin. Il suffit alors de prendre η_0 assez petit pour pouvoir absorber le dernier terme dans le membre de gauche. Pour $\eta_0^2 = \frac{1}{2\|a_k\|^2} \frac{c_{Ga}}{C_{Ga}}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\|u - u_h\|^2 \leq \frac{\|a_k\|}{c_{Ga}} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1}$$

et l'inégalité (1.13) en découle aussitôt. $\square$

Remarque 1.5. 1. La démonstration montre que le résultat reste vrai (avec un autre η_0) en remplaçant la constante 2 dans (1.13) par $1 + \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Exercice 1.7. (Mise en évidence numérique de l'effet de pollution).

Dans cet exercice, on propose de mener une expérience numérique avec FreeFem++ pour mettre en évidence l'effet de pollution. On considère le problème de Helmholtz "concret" suivant, posé sur la boule unité $\Omega := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (-k^{-2}\Delta - 1)u = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} - iku = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

où n désigne le vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$ et $g(x) = ik(x_1 - 1)e^{ikx_1}$.

1. Vérifier que $u = e^{ikx_1}$ est solution de (1.14) (g a été choisie précisément pour cela).
2. Montrer que u vérifie

$$a_k(u, v) = L(v)$$

pour tout $v \in H^1(\Omega)$, où

$$a_k(u, v) = \int_{\Omega} \{k^{-2}\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - u\overline{v}\} dx - ik^{-1} \int_{\partial\Omega} u\overline{v} ds$$

$$L(v) = k^{-2} \int_{\partial\Omega} g\overline{v}.$$

3. Soit $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $a_k(u, v) = 0$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Démontrer que $u \in H_0^1(\Omega)$, puis posant $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω , vérifier que $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, déterminer $\nabla \tilde{u}$ et montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \{\nabla \tilde{u} \cdot \nabla \varphi - k^2 \tilde{u} \varphi\} dx = 0$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

4. En utilisant le Théorème 0.1, en déduire que $\tilde{u} = 0$, et donc $u = 0$.
5. Démontrer que, en prenant $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}_k^1 = H^1(\Omega)$ muni de la norme $u \mapsto \sqrt{k^{-2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2}$ et avec a_k ci-dessus, les hypothèses (1.3)-(1.6) ci-dessus sont vérifiées. Est-ce le cas pour l'exemple canonique de l'introduction ?

1 Approximation de Galerkin en régime haute-fréquence

6. Écrire un programme *FreeFem++* qui crée un maillage de Ω (approché par un polygône) avec un pas maximal (environ) h spécifié. Créer un espace V_h d'éléments finis de Lagrange de degré 1 sur ce maillage, et, en utilisant *FreeFem++*, calculer une approximation de Galerkin u_h de u dans V_h .
7. Montrer que la meilleure approximation en norme $\mathcal{H}_k^1$ de u dans l'espace V_h est l'unique solution $v_h \in V_h$ du problème variationnel

$$\int_{\Omega} \left\{ k^{-2} \nabla v_h \cdot \overline{\nabla w_h} + v_h \overline{w_h} \right\} dx = \int_{\Omega} f \overline{w_h} dx + \int_{\partial\Omega} q \overline{w_h} ds \quad \text{pour tout } w_h \in V_h.$$

où $f = 2u$ et $q = ik^{-1}xu$.

8. En utilisant l'observation de la question précédente, calculer v_h avec *FreeFem++*.
9. Calculer le rapport $C(k) := \frac{\|u - u_h\|_{\mathcal{H}_k^1}}{\|u - v_h\|_{\mathcal{H}_k^1}}$ avec *FreeFem++*. Répéter l'expérience pour $k = 10, 15, \dots$ (jusqu'à épuisement de la mémoire) avec un maillage choisi tel que $hk = 0.5$, et tracer la fonction $k \mapsto C(k)$.
10. Même question mais cette fois en choisissant $hk^2 = 5$. Commenter.

2 La méthode de la couche parfaitement adaptée de Bérenger

1 Introduction

Pour appliquer le formalisme du chapitre précédent au problème de diffraction (0.1), la principale difficulté est que le domain Ω^{ext} n'est pas borné. En particulier, l'injection canonique $H^1(\Omega^{\text{ext}}) \rightarrow L^2(\Omega^{\text{ext}})$ n'est *pas compacte* (elle le serait si Ω^{ext} était borné, d'après le théorème de Rellich [21], voir aussi [1, Théorème 6.3] pour une référence en anglais).

Dans ce chapitre, on montre comment contourner cette difficulté grâce à la méthode de la couche parfaitement adaptée (plus connue sous le nom de “PML”, de l'anglais “perfectly matched layer”), qui a révolutionné le domaine de la simulation numérique des problèmes de diffraction lorsqu'elle a été introduite en 1994 par Jean-Pierre Bérenger dans [3].¹

2 Préliminaires sur le problème de diffraction

On commence par rappeler ci-dessous une démonstration de l'unicité dans le Théorème 0.1, qui repose sur le lemme de Rellich [21].

Lemme 2.1 (Rellich (1943))

Soit $R_0 > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_{R_0}})$ vérifiant $(\Delta + k^2)u = 0$ pour $|x| > R_0$, et telle que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 ds = 0.$$

Alors $u = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_{R_0}}$.

Démonstration. On se restreint au cas où $d = 2$ pour alléger les notations ; un argument similaire existe en dimension 3 en utilisant un développement en harmoniques sphériques.

1. L'article de Bérenger compte plus de 15000 citations sur Google Scholar ! Il concerne la diffraction d'une onde électromagnétique dans le régime temporel, mais l'idée se transpose au régime harmonique et à l'équation de Helmholtz.

2 Méthode de la couche parfaitement adaptée de Béranger

Pour tout $r > R_0$, on peut développer $\theta \mapsto u(r, \theta)$ en série de Fourier

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta},$$

où $a_n(r) = \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$. Par dérivation sous l'intégrale (justifiée par le fait que u est de classe C^2 sur Ω^{ext}), on vérifie que $a_n(r)$ est solution de l'équation de Bessel

$$r^2 \frac{d^2 a_n}{dr^2} + r \frac{da_n}{dr} + (k^2 r^2 - n^2) a_n = 0,$$

ce qui implique que a_n s'écrit comme une combinaison linéaire

$$a_n(r) = \alpha_n H_n^{(1)}(kr) + \beta_n H_n^{(2)}(kr), \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C},$$

des fonctions de Hankel $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$ de première et seconde espèce [26]. De plus, une condition de Sommerfeld doit être vérifiée par a_n puisque (par dérivation sous l'intégrale),

$$a'_n(r) - ika_n(r) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) e^{-in\theta} d\theta = o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{quand } r \rightarrow \infty.$$

Or, seule la fonction $H_n^{(1)}(kr)$ vérifie cette condition, donc $\beta_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Enfin, pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \int_{|x|=r} |u(r, \theta)|^2 ds &= \int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^2 r d\theta = r \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(r)|^2 \\ &= r \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 |H_n^{(1)}(kr)|^2 \\ &\geq r |\alpha_m|^2 |H_m^{(1)}(kr)|^2 \\ &\sim r |\alpha_m|^2 \frac{2}{k\pi r} = \frac{2}{k\pi} |\alpha_m|^2. \end{aligned}$$

d'après le comportement asymptotique de $|H_n^{(1)}(x)|$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que $\alpha_m = 0$, et donc $u = 0$. $\square$

Démonstration : unicité dans le Théorème 0.1. On utilise le lemme de Rellich et d'un argument d'analyticité :

1. L'intégration par parties suivante, effectuée sur le domaine $D_R = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} : |x| \leq R\}$ (représenté sur la Figure 2.1)

$$\int_{D_R} |\nabla u|^2 - k^2 |u|^2 dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} d\sigma + \int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma,$$

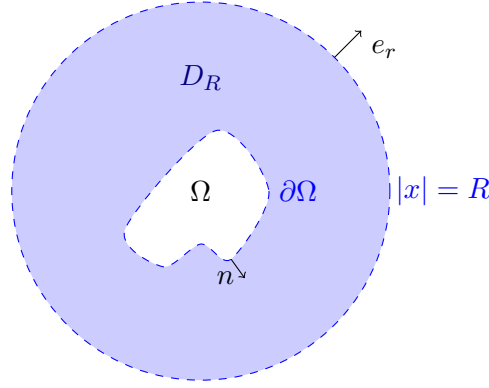


FIGURE 2.1 – Le domaine D_R introduit dans la démonstration de l'unicité pour le Théorème 0.1. La quantité $\text{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{u} \right)$, intégrée sur une surface fermée entourant Ω , où ν est le vecteur normal à cette surface pointant du côté non borné, est indépendante de la surface choisie.

où n désigne le vecteur normal unitaire sortant de Ω (donc entrant dans D_R), montre que

$$\text{Im} \left(\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} d\sigma \right) = \text{Im} \left(\int_{|x|=R} \frac{\partial u}{\partial r} \bar{u} d\sigma \right). \quad (2.1)$$

Or lorsque $g = 0$, le membre de gauche s'annule (puisque $\bar{u} = \bar{g} = 0$ sur $\partial \Omega$), ce qui fournit l'annulation du terme croisé dans le développement du carré $\int_{|x|=R} |\partial_r u - iku|^2 ds$, et donc l'identité

$$\int_{|x|=R} |\partial_r u - iku|^2 d\sigma = \int_{|x|=R} |\partial_r u|^2 + k^2 |u|^2 d\sigma. \quad (2.2)$$

2. D'après la condition de Sommerfeld, le membre de gauche de (2.2) tend vers 0 lorsque $R \rightarrow \infty$; et puisque le membre de droite ne contient par ailleurs que des termes positifs, on en déduit que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 d\sigma = 0.$$

Le Lemme de Rellich assure donc que $u = 0$ dans le complémentaire d'une certaine boule.

2. Cette relation a une interprétation physique. Pour la donner, notons $p(t, x) = \text{Re}(e^{i\omega t} u)$, la variation de pression acoustique en régime permanent, et $\mathbf{v}(t, x)$ le déplacement du fluide. Selon les équations de l'acoustique linéaire, p et $\mathbf{v}$ vérifient la relation $\partial_t p + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (dans un certain choix d'unités). Un calcul simple montre alors que $\frac{1}{\omega} \int_{\Sigma} \text{Im} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \bar{u} \right) dS = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{\Sigma} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt$, et cette dernière quantité est la valeur moyenne (en temps) du flux d'intensité acoustique à travers la surface Σ . La relation (2.1) exprime donc que une **conservation** de ce flux entre deux surface fermées.

2 Méthode de la couche paralement adaptée de Béranger

3. Pour tout ouvert borné régulier D entourant l'obstacle $\overline{\Omega}$, on a la représentation intégrale (voir l'exercice 2.1)³

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} u(y) - G(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$$

où G est le noyau de Green associé à l'équation de Helmholtz

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) & \text{en dimension } d = 2 \\ \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} & \text{en dimension } d = 3. \end{cases}$$

Ceci montre que sur l'ouvert $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{D}$, u est une *fonction analytique* de chaque variable $x_1, \dots, x_d$ (théorème d'holomorphicité des intégrales à paramètres, puisque H_0 , $\exp$, et $z \mapsto \sqrt{a^2 + z^2}$ sont holomorphes pour $a \in \mathbb{R}$ et z au voisinage de l'axe réel). Comme ceci est vrai pour D arbitrairement “proche” de Ω , on en déduit que u est analytique sur Ω^{ext} . D'après le principe des zéros isolés, et le résultat de l'étape 2, on en déduit que $u = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ (puisque cet ouvert est connexe). $\square$

Remarque 2.1. Pour montrer l'existence dans le Théorème 0.1, il existe principalement deux approches :

- (i) On peut reformuler le problème de diffraction (0.1) sous la forme d'une équation intégrale, et utiliser la théorie de Fredholm pour résoudre cette dernière. Pour cette approche, la référence classique est [19], où est développée la théorie des équations intégrales dans le cas d'un bord Lipschitzien.
- (ii) On peut réduire (0.1) à une formulation variationnelle sur un ouvert borné, avec une condition au bord faisant intervenir l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann sur une sphère de rayon $R > 0$ contenant l'obstacle (cette idée a été introduite en 1989 par Keller et Givoli, voir [16]). L'injection compacte de $H^1(B_R) \subset L^2(\Omega_R)$ permet alors d'utiliser la théorie de Fredholm, et l'existence d'une solution découle de l'unicité (voir par exemple [7]). L'un des pionniers de cette approche est Nédélec dans [20], et on trouve dans cette référence les détails nécessaires concernant l'opérateur de Dirichlet-Neumann sur la sphère.

Exercice 2.1. (Représentation intégrale d'une onde sortante).

Soit Ω un ouvert et $u \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ une onde sortante. On considère D un ouvert borné régulier contenant $\overline{\Omega}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Soient $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ et $R > 0$ tel que $\overline{D} \cup \overline{B(x, \rho)} \subset B_R$. On note $U_{\rho, R} := B_R \setminus (\overline{D} \cup \overline{B(x, \rho)})$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que la fonction $y \mapsto G(x, y)$ est une onde sortante sur $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B(x, \rho)}$.

3. On peut aussi utiliser une représentation intégrale directement sur $\partial\Omega$, mais l'absence de régularité du bord oblige alors à comprendre cette égalité dans un sens plus faible et plus technique, voir [19, Chapitres 6 et 7]

3. En appliquant le théorème de Green sur $U_{\rho,R}$, démontrer que

$$\int_{\partial U_{\rho,R}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x, y) - u \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds = 0$$

où ν est le vecteur normal unitaire sortant sur $\partial U_{\rho,r}$.

4. En passant à la limite lorsque $\rho \rightarrow 0$, en déduire que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x, y) - u \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds \\ &\quad + \int_{\partial B_R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}(y) G(x, y) - u \frac{\partial G(x, y)}{\partial r(y)} \right\} ds \end{aligned}$$

5. En utilisant le principe de conservation vu dans la démonstration du lemme de Rellich, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{|x|=R} |u|^2 ds \leq C$$

pour tout R suffisamment grand.

6. En passant à la limite pour $R \rightarrow \infty$, en déduire la formule de représentation intégrale

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) G(x, y) \right\} ds$$

où n est le vecteur normal unitaire sortant de ∂D (donc l'opposé de ν).

Les solutions du problème de diffraction (0.1) se comportent analytiquement en fonction de la coordonnée radiale à l'infini. Ceci a été démontré en dimension $d = 3$ par Atkinson en 1949 [2] et généralisé par Wilcox en 1956 [27]. Plus précisément, on a le

Théorème 2.2 (Développement d'Atkinson-Wilcox)

Soit $R > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R})$ vérifiant $(\Delta + k^2)u = 0$ pour tout $|x| > R$ ainsi que la condition de Sommerfeld. Alors u admet un développement de la forme

$$u(x) = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta, \phi)}{r^n} \quad \text{pour tout } r > R$$

où (r, θ, ϕ) désignent les coordonnées sphériques de x , et où les fonctions F_n sont infiniment différentiables et vérifient

$$\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\partial_{\theta}^k \partial_{\phi}^l F_n\|_{\infty}}{R_0^n} < \infty \quad \text{pour tout } R_0 > R. \quad (2.3)$$

2 Méthode de la couche paralement adaptée de Béranger

Il s'avère que le résultat analogue en dimension $d = 2$ est faux : une solution sortante de l'équation de Helmholtz ne se développe pas nécessairement sous la forme

$$u \stackrel{?}{=} \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n(\theta)}{r^n},$$

pas plus qu'en remplaçant $\frac{e^{ikr}}{r^{1/2}}$ par $H_0^{(1)}(kr)$. Cependant, on a le résultat suivant, démontré par Karp en 1961 [14].

Théorème 2.3 (Développement de Karp)

Soit $R_0 > 0$ tel que $\Omega \subset B_{R_0}$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R})$ vérifiant $(\Delta + k^2)u = 0$ pour tout $|x| > R$ ainsi que la condition de Sommerfeld. Alors u admet un développement de la forme

$$u(x) = H_0^{(1)}(kr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(\theta)}{r^n} + H_1^{(1)}(kr) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(\theta)}{r^n}$$

où (r, θ) désignent les coordonnées polaires de x , et les fonctions F_n et G_n sont infiniment différentiable et vérifient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|F_n^{(k)}\|_{\infty}}{R_0^n} + \frac{\|G_n^{(k)}\|_{\infty}}{R_0^n} < \infty \quad \text{pour tout } R_0 > R.$$

Remarque 2.2. Ces résultats vont nous permettre de déformer analytiquement l'équation de Helmholtz en une équation "dissipative" dont les solutions décroissent exponentiellement, ce qui est l'idée de base pour la méthode de troncature numérique étudiée au paragraphe suivant.

On présente une démonstration du Théorème ci-dessous 2.2. Cette démonstration ne fonctionne pas en dimension 2 : la méthode utilisée par Karp dans [14] passe plutôt par un développement en fonctions de Hankel, et exploite les relations de récurrence liant les fonctions de Hankel de différents ordres, concluant à l'aide des asymptotiques connues des coefficients intervenant dans ces relations.

Démonstration du Théorème 2.2. Fixons $R \in (0, R_0)$ le rayon d'une boule contenant l'obstacle Ω . Comme u est solution de

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{pour } |x| \geq R,$$

est de classe C^∞ sur la sphère de rayon R , et satisfait la condition de Sommerfeld, on a la représentation intégrale

$$u(x) = \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) G(x, y) ds(y) \quad (2.4)$$

2 Préliminaires sur le problème de diffraction

où $\nu(y) = \frac{y}{|y|}$ et $G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ (voir par exemple [9, Théorème 3.3]). Or, en notant (r, θ, ϕ) et (R, θ', ϕ') les coordonnées sphériques de x et y , on a

$$|x - y| = (r^2 + R^2 - 2rR \cos(\gamma))^{1/2} = r(1 + w^2 - 2w \cos(\gamma))^{1/2}$$

où $w := R/r$, $\cos \gamma := \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\phi - \phi')$, et on peut vérifier que la fonction

$$f : \mathbb{R} \times D(0, 1) \ni (\gamma, w) \mapsto (1 + w^2 - 2w \cos(\gamma))^{1/2}$$

(où $z \mapsto z^{1/2}$ désigne la détermination principale de la racine carrée) est continue, holomorphe par rapport à la variable w , ne s'annule jamais lorsque $w \in D(0, 1)$, et vérifie $f(\gamma, 0) = 1$. On peut donc écrire

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \frac{e^{ikr} \exp\left(ikR \left[\frac{f(\gamma, w)-1}{w}\right]\right)}{r f(\gamma, w)} =: \frac{e^{ikr}}{r} g(\gamma, w),$$

où $g : \mathbb{R} \times D(0, 1)$ est infiniment différentiable et holomorphe par rapport à w , et admet à ce titre le développement

$$g(\gamma, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma) w^n \quad \text{où} \quad a_n(\gamma) = \frac{1}{n!} \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{d^n}{dw^n} g(\gamma, w) \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on a pour tout $a < 1$ l'estimation uniforme suivante, en notant $C_a = \{|z| = a\}$ le cercle de rayon r centré en 0 dans $\mathbb{C}$:

$$|a_n(\gamma)| \leq \frac{1}{a^n} \sup_{|w|=a} |g(\gamma, w)| \leq \frac{1}{a^n} \left(\sup_{(w, r) \in C_a \times [0, 2\pi]} |g(\gamma, r)| \right) =: \frac{C_a n!}{a^n}, \quad (2.5)$$

le supremum étant fini par continuité de g et puisque $C_a \times [0, 2\pi]$ est compact. En particulier, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\gamma) w^n$ est normalement convergente pour $(\gamma, w) \in \mathbb{R} \times \overline{D(0, a)}$, ce qui permet d'effectuer l'intégration terme à terme

$$\begin{aligned} \int_{|y|=R} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y) &= \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{|y|=R} a_n(\gamma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y) \right) w^n \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{|y|=R} a_n(\gamma) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y) \right) \left(\frac{R}{r} \right)^n \\ &=: \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n A_n(\theta, \phi)}{r^n}, \quad \frac{R}{r} < a \end{aligned}$$

où, d'après (2.5), les fonctions A_n vérifient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|R^n A_n(\theta, \phi)\|_{\infty}}{r^n} < \infty \quad \text{pour} \quad \frac{R}{r} < a.$$

2 Méthode de la couche parfaitement adaptée de Béranger

En prenant a suffisamment proche de 1, on a $R/R_0 < a$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|R^n A_n(\theta, \phi)\|_{\infty}}{R_0^n} < \infty$. De même, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|R^n \partial_{\theta}^k \partial_{\phi}^l A_n(\theta, \phi)\|_{\infty}}{R_0^n} < \infty$$

en écrivant $\partial_{\theta}^k \partial_{\phi}^l A_n(\theta, \phi) = \int_{|y|=R} (\partial_{\theta}^k \partial_{\phi}^l a_n)(\gamma) \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y)$ et en majorant cette intégrale à l'aide des inégalités de Cauchy pour $\partial_{\theta}^k \partial_{\phi}^l g(w, \gamma)$.

Ce qui précède montre que le second terme au second membre de (2.4) possède un développement jouissant des propriétés annoncées. Pour le premier terme, on procède de manière similaire, en observant que, avec $\rho := |x - y| = \frac{R}{w} f(\gamma, w)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu(y)} &= \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left(\frac{y}{|y|} \cdot \frac{y-x}{|x-y|} \right) \frac{ik|x-y|-1}{|x-y|} \\ &= \frac{e^{ikr}}{r} h(\gamma, w) \end{aligned}$$

avec $h(\gamma, w) = \frac{w - \cos \gamma}{f(\gamma, w)} \frac{ikf(\gamma, w) - w/R}{f(\gamma, w)}$ est encore infiniment différentiable et holomorphe en w sur $D(0, 1)$. On peut donc appliquer le même raisonnement que ci-dessus, et la conclusion s'ensuit par linéarité. $\square$

3 Étude de la méthode de Béranger

3.1 Construction de la couche parfaitement adaptée

Une idée naïve. Avant d'essayer quelque chose de compliqué, on pourrait naïvement essayer de tronquer le domaine en imposant une condition de Dirichlet sur une frontière artificielle située assez loin de l'obstacle. Le problème est que ce type de troncature ne fonctionnerait qu'à condition que la vraie solution soit négligeable au voisinage de ce bord artificiel (sinon, l'onde non-résiduelle va "rebondir" sur cette paroi non-physique, et revenir vers l'obstacle, polluant ainsi la véritable solution). À cause de la décroissance seulement en $r^{-\frac{d-1}{2}}$, il faut donc tronquer "très loin" pour avoir une approximation raisonnable, ce qui est bien trop coûteux en calcul.

PML : idée intuitive. L'idée trouvée par Béranger consiste, informellement, à entourer une région autour de l'obstacle avec une couche artificielle parfaitement absorbante, dans laquelle les ondes pénètrent et s'éteignent sans rebond vers l'obstacle. On peut rapprocher ce procédé de celui utilisé en pratique dans des expériences acoustiques, qui consiste à couvrir les murs d'une pièce avec une mousse pour obtenir une chambre *anéchoïque* (sans écho, i.e., sans rebonds parasites), afin de simuler l'acoustique en espace libre.

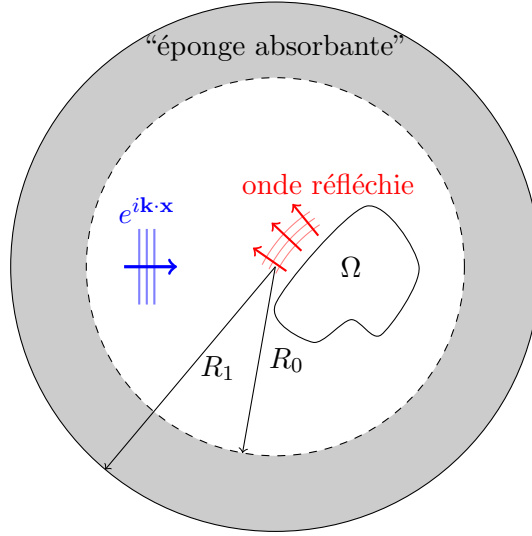


FIGURE 2.2 – Le problème de Helmholtz tronqué par une “éponge absorbante”.

Formalisation mathématique. Pour introduire la méthode de Béranger, on peut commencer par développer la solution u du problème de diffraction (0.1) sous la forme

$$\forall |x| \geq R_0 \quad u(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} & \text{en dimension } d = 2, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \phi) & \text{en dimension } d = 3, \end{cases} \quad (2.6)$$

où $R_0 > 0$ est tel que $\overline{\Omega} \subset B_{R_0}$. On définit alors une nouvelle fonction $\tilde{u} : \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, par exemple en dimension 2 (nous restreignons la discussion ci-dessous à la dimension 2 pour alléger, mais l’approche s’applique sans difficulté en dimension 3) comme suit :

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{pour } |x| \leq R_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(1)}(kr\alpha) e^{in\theta} & \text{pour } |x| > R_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ici, $\alpha := 1 + i\sigma(r)$ est une fonction régulière à valeurs *complexes* choisie telle que

- (i) $\sigma \equiv 0$ pour $r \leq R_0$
- (ii) $\sigma \nearrow$ pour $R_0 \leq r \leq R_1$
- (iii) $\sigma \equiv \sigma_0$ pour $r \geq R_1$,

L’idée fondamentale est que ce changement de variable fait passer continuellement d’un comportement oscillant à un comportement évanescent : la fonction $\tilde{u}(x)$ est **exponentiellement décroissante** lorsque $|x| \rightarrow \infty$. Cette décroissance est claire dans le

2 Méthode de la couche paraitement adaptée de Béranger

cas particulier où la série ne contient qu'un nombre fini de termes non-nuls, d'après le comportement asymptotique connu des fonctions de Hankel

$$H_n^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (2.8)$$

(où $\sqrt{z}$ est la détermination standard de la racine carrée) valable uniformément pour $|z| \rightarrow \infty$ tel que $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$, voir [18, eq. (5.11.4)]. Dans le cas général, cet argument est insuffisant car les fonctions $|H_n^{(1)}(z)|$ croissent très vite en fonction de n , mais la convergence de la série et son comportement exponentiellement décroissant pour $r \rightarrow \infty$ peuvent être obtenus par un argument d'analyticité.

Proposition 2.4 (Propriétés de $\tilde{u}$)

Soit u la solution du problème de diffraction (0.1) en dimension $d = 2$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients du développement (2.6). Alors pour tout intervalle compact $K \subset (R_0, +\infty)$,

$$\sup_{r \in K} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left(|n|^m |\alpha_n H_n^{(1)}(k\alpha r)| \right) < \infty. \quad (2.9)$$

En particulier, la série dans (2.7) converge normalement sur tout compact, et $\tilde{u}$ est bien définie. De plus, on a $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$.

Remarque 2.3. Nous démontrons en fait une propriété plus forte ci-dessous : la fonction $\tilde{u}$ est exponentiellement décroissante à l'infini.

Démonstration. Notons $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \mid |z| > R_0\}$. D'après le Théorème 2.3, il existe une fonction $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, infiniment différentiable, holomorphe en sa première variable, et telle que

$$u(x) = F(r, \theta) \quad \text{pour tout } |x| > R_0.$$

On a donc

$$c_n H_n^{(1)}(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta$$

et par principe d'identité des fonctions analytiques, il en découle que

$$c_n H_n^{(1)}(kz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z, \theta) d\theta.$$

De plus, une intégration par parties comme dans le lemme de Riemann-Lebesgue montre que

$$|c_n H_n^{(1)}(kz)| = O(n^{-m})$$

uniformément pour z dans un compact de $\mathcal{U}$. Par continuité de α , ceci implique (2.9). Enfin, le Théorème 2.3 combiné au comportement asymptotique (2.8) de $H_0^{(1)}(z)$ et

3 Étude de la méthode de Béranger

$H_1^{(1)}(z)$ pour $|z| \rightarrow \infty$ implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_m > 0$ telle que

$$|(\partial_\theta^m F)(r(1 + i\sigma_0), \theta)| \leq C_m \frac{e^{-k\sigma_0 r}}{r^{1/2}} \quad \text{pour tout } r > R_0.$$

Ceci entraîne que $\tilde{u}$ est exponentiellement décroissante à l'infini, donc $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$. $\square$

En écrivant l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires et en remarquant que

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \rho} \tilde{u}(\tilde{\rho}, \theta) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right) (\tilde{\rho}, \theta), \quad \beta := \alpha + \rho \frac{d}{d\rho} \alpha$$

on vérifie que $\tilde{u} \in H^1(\Omega^{\text{ext}})$ est solution du *problème de Béranger*

$$\begin{cases} (\tilde{\Delta} + k^2)\tilde{u} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \\ \tilde{u} = g & \text{sur } \partial\Omega \\ |\tilde{u}| & \text{est bornée.} \end{cases} \quad (2.10)$$

où $\tilde{\Delta}$ est l'opérateur différentiel donné en coordonnées polaires par ⁴

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\alpha\beta\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\alpha\beta^{-1}\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

L'opérateur de Béranger est donc l'opérateur de Helmholtz dans la région $|x| \leq R_0$, puis un certain opérateur de transition dans la région $R_0 \leq |x| \leq R_1$, et enfin (un multiple de) l'opérateur de Helmholtz avec fréquence complexe $k := k(1 + i\sigma_0)$ pour $|x| \geq R_1$.

Plutôt que le problème extérieur de Dirichlet (0.1), c'est le problème de Béranger que l'on va résoudre numériquement. On va montrer qu'il admet une unique solution dans $H^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}_+)$, qui est donc nécessairement égale à $\tilde{u}$, et donc **qui coïncide (exactement) avec u pour $|x| \leq R_0$** . Enfin, l'avantage est que l'on sait d'avance que cette unique solution est exponentiellement décroissante : ceci va nous permettre de démontrer qu'une troncature par une condition de Dirichlet cause une erreur exponentiellement petite par rapport à la distance de troncature, voir le Théorème 2.10 ci-dessous.

3.2 Formulation variationnelle de l'équation de Béranger

Dans ce qui suit, nous posons $\mathcal{H} := L^2(\Omega^{\text{ext}})$,

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega^{\text{ext}}} u(x) \overline{v(x)} dx$$

son produit scalaire, et $\mathcal{H}_k^1$ l'espace $H_0^1(\Omega^{\text{ext}})$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 := \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + k^{-2} \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2$$

4. Une expression en coordonnées cartésiennes est bien sûr possible, et commode pour l'implémentation ; voir par exemple [8, Section 3]

2 Méthode de la couche parfaitement adaptée de Béranger

(bien sûr équivalente à la norme habituelle). Comme au chapitre précédent, nous notons $\mathcal{H}_k^{-1}$ son anti-dual. Pour obtenir une formulation variationnelle du problème de Béranger, nous commençons par réécrire l'opérateur sous la forme

$$-\alpha\beta k^{-2}(\tilde{\Delta} + k^2) =: L =: -k^{-2} \operatorname{div} A \nabla - \alpha\beta,$$

où l'on peut vérifier que

$$A(x) = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Id} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} =: \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{Id} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right) M(x) \quad (2.11)$$

et introduisons la forme sesquilinéaire $a_k : \mathcal{H}_k^1 \times \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$a_k(u, v) := \int_{\Omega^{\text{ext}}} \left\{ k^{-2} (A \nabla u) \cdot \overline{\nabla v} - \alpha\beta u \overline{v} \right\} dx$$

où nous avons noté $u \cdot v := u_1 v_1 + u_2 v_2$ pour tout $u, v \in \mathbb{C}^2$. Le fait de multiplier par k^{-2} permet de rendre a_k continue dans $\mathcal{H}_k^1 \times \mathcal{H}_k^1$ uniformément en k . Remarquons immédiatement une propriété importante de la matrice A :

Lemme 2.5 (Minoration de A)

Il existe $c > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{C}^2$,

$$\operatorname{Re}(A\xi \cdot \bar{\xi}) \geq c_0 (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2).$$

Démonstration. La matrice $M(x)$ dans (2.11) est symétrique, de déterminant nul, et de trace 1. Ses valeurs propres sont donc 0 et 1, et par conséquent, les deux valeurs propres de $A(x)$ sont données par $\lambda_1 = \alpha\beta^{-1}$ et $\lambda_2 = \alpha^{-1}\beta$. Ainsi,

$$\operatorname{Re}(A\xi \cdot \bar{\xi}) = \left(\frac{1}{2} (A + A^*) \xi \right) \cdot \bar{\xi} \geq \max(\operatorname{Re}(\lambda_1), \operatorname{Re}(\lambda_2)) (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2).$$

Or, il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) = \frac{\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})}{|\beta|^2} = \frac{1 + \sigma(\sigma + r\sigma')}{1 + (\sigma + r\sigma')^2} \geq c_0 > 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^2$$

puisque $\sigma \geq 0$ est croissante et que $\sigma + r\sigma'$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. On obtient également une minoration de $\operatorname{Re}(\lambda_2)$ par la même méthode. $\square$

Soit $G \in H^1(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$ une extension de la donnée au bord, i.e., $\gamma_{\partial\Omega} G = g$, que l'on peut toujours choisir telle que

$$\|G\|_{H^1(\Omega^{\text{ext}})} \leq \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

(par exemple en choisissant G comme la solution de $\Delta G = 0$ sur $B_{R_0} \setminus \bar{\Omega}$ avec condition de Dirichlet homogène sur ∂B_{R_0} et $G = g$ sur $\partial\Omega$). En écrivant $\tilde{u} =: G + w$, on a par construction $w \in H_0^1(\Omega^{\text{ext}})$ (puisque $\gamma w = \gamma(u - G) = g - g = 0$) et en observant que, par intégration par parties

$$a_k(u, v) = \langle Lu, v \rangle \quad \text{pour tout } v \in C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}}),$$

on est conduit à considérer le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } w \in \mathcal{H}_k^1 \text{ tel que pour tout } v \in \mathcal{H}_k^1, \quad a_k(w, v) = l_G(v). \quad (2.12)$$

où $l_G \in (\mathcal{H}_k^1)^*$ est la forme anti-linéaire définie par

$$l_G(v) := -a_k(G, v).$$

Pour étudier ce problème variationnel, nous montrons les propriétés suivantes de a_k :

Proposition 2.6 (Propriétés de a_k)

Supposons que $\sigma_0 > 1$. Alors la famille de formes sesquilinéaires $(a_k)_{k>0}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *Continuité k -uniforme* : Il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout k suffisamment grand,

$$\|a_k\| := \sup_{u, v \in \mathcal{H}_k^1 \setminus \{0\}} \frac{|a_k(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{H}_k^1} \|v\|_{\mathcal{H}_k^1}} \leq C_0$$

2. *Inégalité de Gårding* : Il existe une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle et des constantes $c_{\text{Ga}} > 0$, $C_{\text{Ga}} > 0$ telles que pour tout k suffisamment grand,

$$\text{Re}(a_k(u, u)) \geq c_{\text{Ga}} \|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 - |\langle \chi u, u \rangle|$$

3. *Injectivité* : Pour tout $k > 0$, l'unique solution $u \in \mathcal{H}_k^1$ du problème (2.12) avec $l_G = 0$ est la fonction nulle.

Démonstration. Le point 1 ne pose pas de difficulté. Pour le point 2, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_k(u, u) &= \int_{\Omega^{\text{ext}}} \left\{ k^{-2} (A \nabla u) \cdot \overline{\nabla u} - (1 + i\sigma_0)^2 |u|^2 \right\} dx + \int_{\Omega^{\text{ext}}} [\alpha\beta - (1 + i\sigma_0)^2] |u|^2 dx \\ &=: a_k^1(u, u) + \langle \chi u, u \rangle \end{aligned}$$

où $\chi := \alpha\beta - (1 + i\sigma_0)^2$ est C^∞ à support compact par définition de α et β . Mais d'après le Lemme 2.5,

$$\text{Re}(a_k^1(u, u)) \geq c_0 k^{-2} \|\nabla u\|_{\mathcal{H}}^2 - \text{Re}[(1 + i\sigma_0)^2] \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \min(c_0, \sigma_0^2 - 1) \|u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2.$$

2 Méthode de la couche parfaitement adaptée de Béranger

Pour le point 3, on présente un argument dû à Collino et Monk dans [8]. Une fonction u vérifiant la condition 3 est solution, dans $\Omega^{\text{ext}} \cap B_{R_0}$, de l'équation de Helmholtz non-déformée avec condition de Dirichlet homogènes pour $|x| \leq R_0$. Comme on l'a vu dans la démonstration du Lemme de Rellich, on a donc la conservation du flux

$$\operatorname{Im} \left(\int_{|x|=R_0} u \frac{\overline{\partial u}}{\partial \nu} \right) ds = \operatorname{Im} \left(\int_{\partial \Omega} u \frac{\overline{\partial u}}{\partial \nu} \right) ds = 0$$

(puisque $u = 0$ sur $\partial \Omega$). Mais pour $|x| \geq R_0$, on peut également encore développer u sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(c_n H_n^{(1)}(k\alpha r) + d_n H_n^{(2)}(k\alpha r) \right) e^{in\theta}$$

où les coefficients d_n sont nécessairement nuls puisque u (et donc aussi $r \mapsto \int_0^{2\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$) est bornée. D'après l'identité de Parseval, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Im} \left(\int_{\partial \Omega} u \frac{\overline{\partial u}}{\partial \nu} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \operatorname{Im} \left[H_n^{(1)}(kR_0) \frac{d}{dr} (H_n^{(1)}(kR_0)) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} k |c_n|^2 (Y_n(kR_0) J'_n(kr) - J_n(kR_0) Y'_n(kR_0)). \end{aligned}$$

On voit apparaître le Wronskien $W[J_n, Y_n] = J_n Y'_n - J'_n Y_n$, pour lequel on a la propriété classique

$$W[J_n, Y_n](x) = \frac{2}{\pi x},$$

dont on déduit que $c_n = 0$ pour tout n , et donc $u = 0$. $\square$

Comme au chapitre précédent, on peut à présent introduire l'opérateur de Béranger

$$P(k) : \mathcal{H}_k^1 \rightarrow \mathcal{H}_k^{-1}$$

défini par

$$\langle P(k)u, v \rangle := a_k(u, v).$$

Une légère adaptation de la démonstration du Théorème 1.7 nous permet de conclure que $P(k)$ est un isomorphisme.

Exercice 2.2. (L'opérateur de Béranger est un isomorphisme).

En adaptant la démonstration du Théorème 1.7, démontrer que $P(k)$ est un isomorphisme. Montrer que l'unique solution $\tilde{u}$ du problème de Béranger est donnée par

$$\tilde{u} = G + P(k)^{-1} l_G.$$

Exercice 2.3. (Cas de la dimension 3).

Établir une formulation variationnelle du problème de Béranger en dimension $d = 3$ et vérifier que les résultats de la Proposition 2.6 ont toujours lieu.

Comme au chapitre précédent, on peut noter $R(k) := P(k)^{-1}$ et $\rho(k) := \|R(k)\|_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}}$. C'est à cette quantité $\rho(k)$ que la discussion de la remarque 1.1 – reliant le comportement de $\rho(k)$ aux propriétés des rayons – s'applique.

4 Décroissance exponentielle des solutions de Bérenger

En vue de la troncature du problème de Bérenger, nous étudions à présent la décroissance exponentielle de ses solutions.

Norme $H^{1/2}$: Pour $u \in H^1(\Omega^{\text{ext}})$ et $U \subset \Omega^{\text{ext}}$ un ouvert borné, on pose

$$\|u\|_{H_k^{1/2}(\partial U)} := \inf_{v \in H_0^1(U)} \|u - v\|_{\mathcal{H}_k^1}.$$

Dans ce qui suit, on aura besoin d'estimations de cette norme pour le cas d'une boule $U = B_R$, avec une dépendance explicitement contrôlée vis-à-vis de R . Pour cela, nous utiliserons le lemme élémentaire suivant.

Lemme 2.7 (Estimation de la norme $H^{1/2}$)

Il existe une constante Pour tout $u \in \mathcal{H}_k^1$, et pour tous réels $0 < a < r$,

$$\|u\|_{H_k^{1/2}(\partial B_r)} \leq \left(\int_{|x| > r-a} \left\{ \left(1 + \frac{1}{ak^2}\right) |u|^2 + k^{-2} |\nabla u|^2 \right\} dx \right)^{1/2}$$

Démonstration. Soit $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ une fonction linéaire par morceaux telle que $\chi \equiv 1$ pour $x > r$, $\chi \equiv 0$ pour $x < r - a$, et $\|\nabla \chi\|_\infty \leq \frac{1}{a}$. Puisque $v := (1 - \chi)u \in H_0^1(B_r)$, on a par définition

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial U)} \leq \|u - v\|_{H_k^1(B_R)} = \|\chi u\|_{H_k^1(B_R)}$$

et en écrivant

$$\|\chi u\|_{\mathcal{H}_k^1}^2 = \int_{\text{supp}(\chi)} \left\{ k^{-2} |\nabla(\chi u)|^2 + |u|^2 \right\} dx,$$

le résultat est obtenu en utilisant que $\nabla(\chi u) = \chi \nabla u + u \nabla \chi$. $\square$

Le lemme suivant permet de voir que la décroissance exponentielle des solutions du problème de Bérenger entraîne la même propriété pour les solutions du problème adjoint.

Lemme 2.8 (Une propriété de symétrie)

Soit $R(k)^* : H^1(\Omega_+)^* \rightarrow H^1(\Omega_+)$ l'adjoint de $R(k)$ et soit J l'opérateur de conjugaison complexe $Ju(x) = \overline{u(x)}$. Alors

$$R(k)^* = JR(k)J.$$

2 Méthode de la couche parfaitement adaptée de Bérenger

Démonstration. Ceci résulte de la symétrie de $A(x)$, qui implique que $a(u, v) = \overline{a(\bar{v}, \bar{u})}$, ce qui se traduit par la propriété

$$P(k)^* = JP(k)J.$$

Il en découle que $R^* = (P^*)^{-1} = (JPJ)^{-1} = JP^{-1}J$ puisque $J = J^{-1}$. $\square$

Le lemme qui suit est une adaptation de [4, Proposition 3.2].

Lemme 2.9 (Décroissance exponentielle des solutions de Bérenger)

Pour tout $a > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > R_1 + 2a$, pour tout $k > 0$ et pour tout $f \in \mathcal{H}_k^1$,

$$\|R(k)(\chi f)\|_{H^{1/2}(\partial B_r)} + \|R(k)^*(\chi f)\|_{H^{1/2}(\partial B_r)} \leq C\rho(k)e^{-\frac{k\sigma_0 r}{2}}\|f\|_{\mathcal{H}_k^{-1}} \quad (2.13)$$

où χ est comme dans la Proposition 2.6.

Remarque 2.4. Le résultat est encore vrai (avec une autre valeur de C_a) en remplaçant la constante $\frac{1}{2}$ dans l'exponentielle par n'importe quelle constante strictement plus petite que 1.

Démonstration. Soit $u = R(k)(\chi f)$. Alors u est solution de l'équation de Helmholtz complexe

$$(\Delta + \tilde{k}_0^2)u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_{R_1}}.$$

Or, puisque $u \in H^1(\Omega_+) \cap C^\infty(\Omega_+)$, u est nécessairement borné à l'infini, et donc on peut montrer la représentation intégrale

$$u(x) = \int_{\partial B_{R_1}} \tilde{G}(x, y) \frac{\partial u}{\partial r}(y) - \frac{\partial \tilde{G}(x, y)}{\partial r(y)} u(y) ds \quad \forall |x| > R_1 \quad (2.14)$$

de la même manière que dans l'Exercice 2.1, où $\tilde{G}$ est le noyau de Green exponentiellement décroissant de l'équation de Helmholtz complexe $-\Delta - \tilde{k}_0^2$ (en dimension $d = 2$, ce noyau est donné par $\tilde{G}(x, y) = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(k(1 + i\sigma_0)|x - y|)$).

Par continuité de la trace de H^1 dans L^2 (ici appliqué dans des normes et sur un domaine indépendants de k), et en utilisant la régularité elliptique intérieure du laplacien, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2(\partial B_{R_1})} + \|u\|_{L^2(\partial B_{R_1})} &\leq \|u\|_{H^2(\Omega^{\text{ext}} \cap B_{R_1})} \\ &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega^{\text{ext}} \cap B_{R_1+1})} \\ &\leq k^2 \|u\|_{\mathcal{H}_k^1} \\ &\leq C k^2 \rho(k) \|f\|_{\mathcal{H}_k^{-1}} \end{aligned}$$

puisque $R^*(k) : \mathcal{H}_k^{-1} \rightarrow \mathcal{H}_k^1$ est continu de norme $C\rho(k)$ (Exercice 1.4, en tenant compte du fait que $\rho(k) \geq Ck$ d'après l'exercice 1.3) et qu'il est facile de vérifier que $\|fg\|_{\mathcal{H}_k^{-1}} \leq C(\|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty)\|g\|_{\mathcal{H}_k^{-1}}$ pour tout $f, g \in \mathcal{H}$.

En utilisant ces estimées dans la représentation intégrale (2.14) et en dérivant par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned} |u(x)| + k^{-1}|\nabla u(x)| &\leq C \left(\int_{|y|=R_1} e^{-2\sigma_0 k|x-y|} |x-y|^{-2d} dy \right)^{1/2} (\|\partial_r u\|_{L^2(\partial B_r)} + \|u\|_{L^2(\partial B_r)}) \\ &\leq C \frac{e^{-k\sigma_0 r}}{a^d} \|f\|_{\mathcal{H}_k^{-1}} \end{aligned}$$

pour tout $|x| \geq r-a$, puisque dans ce cas, $a \leq r \leq |x-y|$ pour tout $y \in B_{R_1}$. L'estimation requise pour $R(\chi f)$ est une conséquence de Lemme 2.7, et celle pour $R^*(\chi f)$ s'ensuit en utilisant le Lemme 2.8. $\square$

5 Troncature du problème de Bérenger

Les solutions du problème de Bérenger étant exponentiellement décroissante, il est naturel de considérer leur troncature par une condition de Dirichlet. Ainsi, étant donné $R_t > R_1$ (“t” pour “troncature”), on considère le problème

$$\begin{cases} (-k^{-2}\tilde{\Delta} - 1)u_t = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ u_t = g & \text{sur } \partial\Omega_- \\ u_t = 0 & \text{sur } \partial B_{R_t} \end{cases} \quad (2.15)$$

où $\Omega_t := \Omega^{\text{ext}} \cap B_t$. Ce problème peut être vu comme l'approximation de Galerkin de u avec $H_0^1(\Omega_t) \subset H_0^1(\Omega_+)$ jouant le rôle de l'espace d'approximation. Plus précisément, on considère la formulation variationnelle

$$\text{Trouver } w_t \in H_0^1(\Omega_t) \text{ tel que } a(w_t, \phi) = l_G(\phi) \text{ pour tout } \phi \in H_0^1(\Omega_t) \quad (2.16)$$

Observons que, puisque w vérifie (2.12), ceci signifie exactement que w_t est une approximation de Galerkin de w dans l'espace de Galerkin $V_h := H_0^1(\Omega_t)$ (de dimension infinie, mais bel et bien fermé). On obtient alors une approximation $\tilde{u}_t$ de la solution du problème de Bérenger $\tilde{u}$ en posant $\tilde{u}_t := w_t + G$. L'erreur de troncature vérifie alors

$$\|\tilde{u}_t - \tilde{u}\|_{\mathcal{H}_k^1} = \|w_t - w\|_{\mathcal{H}_k^1}.$$

Afin d'estimer cette erreur, introduisons

$$\eta(k, R_t) := \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|R(k)^*(\chi f)\|_{H_k^{1/2}(\partial B_{R_t})}}{\|f\|_{\mathcal{H}}}.$$

D'après le Lemme 2.9, on a

$$\eta(k, R_t) \leq C e^{-\frac{k\sigma_0 R_t}{2}}.$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 2.10 (Convergence exponentielle de l'erreur de troncature)

Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, si

$$k\sigma_0 R_t \geq C_1$$

alors le problème tronqué (2.16) admet une unique solution et celle-ci vérifie

$$\|\tilde{u}_t - \tilde{u}\|_{\mathcal{H}_k^1} \leq C_2 \rho(k) e^{-\frac{k\sigma_0 R_t}{2}} \|G\|_{\mathcal{H}_k}.$$

En particulier,

$$\left(k^{-2} \|\nabla(\tilde{u}_t - u)\|_{L^2(B_{R_0})}^2 + \|(\tilde{u}_t - u)\|_{L^2(B_{R_0})} \right)^{1/2} \leq C_2 \rho(k) e^{-\frac{k\sigma_0 R_t}{2}} \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

où u est la solution du problème de diffraction (0.1).

Remarque 2.5. 1. D'après un résultat de Burq [6], il existe $C > 0$ tel que $\rho(k) \leq e^{Ck}$. Ainsi, le résultat précédent est en fait vrai (avec une autre constante C_1) sans le facteur $\rho(k)$ au second membre.

2. La décroissance exponentielle de l'erreur de troncature **pour k fixé** a été démontrée par Bramble et Pasciak en 2007 dans [4]. La décroissance exponentielle uniforme en $k\sigma_0 r$ a été obtenue en 2023 par Galkowski, Spence et Lafontaine dans [12, Théorème 1.2]. Le résultat ci-dessus en est une version “allégée”, où l'on n'a pas cherché à obtenir le taux optimal de décroissance exponentielle.

Exercice 2.4. (Démonstration du Théorème 2.10).

En adaptant la démonstration de l'argument de Schatz, démontrer le Théorème 2.10.

Exercice 2.5. (Éléments finis au problème de Béranger tronqué).

Montrer que l'approximation de Galerkin du problème de Béranger tronqué (2.16) par éléments finis rentre dans le cadre du Chapitre précédent. Pour ce faire, préciser le choix des espaces $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_k^1$, le choix de V_h , et montrer que les hypothèses (1.3)–(1.6) sont vérifiées lorsque $k\sigma_0 R_t$ est suffisamment grand. Créer un programme FreeFem++ qui calcule une approximation par éléments finis de la solution d'un problème de diffraction.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] F. V. Atkinson. On Sommerfeld’s “radiation condition.”. *Philos. Mag. (7)*, 40 :645–651, 1949.
- [3] J.-P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994.
- [4] J. H. Bramble and J. E. Pasciak. Analysis of a finite PML approximation for the three dimensional time-harmonic Maxwell and acoustic scattering problems. *Math. Comp.*, 76(258) :597–614, 2007.
- [5] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [6] N. Burq. Décroissance de l’énergie locale de l’équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Math.*, 180(1) :1–29, 1998.
- [7] S. N. Chandler-Wilde and P. Monk. Wave-number-explicit bounds in time-harmonic scattering. *SIAM J. Math. Anal.*, 39(5) :1428–1455, 2008.
- [8] F. Collino and P. Monk. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6) :2061–2090, 1998.
- [9] D. Colton and R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*, volume 72 of *Class. Appl. Math.* Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), reprint of the 1983 original published by Wiley edition, 2013.
- [10] J. Céa. Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Ann. Inst. Fourier*, 14(2) :345–444, 1964.
- [11] B. G. Galerkin. Beams and plates. *Vestnik Ingenerov*, 19 :897–908, 1915.
- [12] J. Galkowski, D. Lafontaine, and E. Spence. Perfectly-matched-layer truncation is exponentially accurate at high frequency. *SIAM J. Math. Anal.*, 55(4) :3344–3394, 2023.
- [13] J. Galkowski and E. A. Spence. Sharp preasymptotic error bounds for the Helmholtz-fem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 63(1) :1–22, 2025.
- [14] S. N. Karp. A convergent ‘farfield’ expansion for two-dimensional radiation functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 :427–434, 1961.

Bibliographie

- [15] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013.
- [16] J. B. Keller and D. Givoli. Exact non-reflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 82(1) :172–192, 1989.
- [17] P. D. Lax and A. N. Milgram. Parabolic equations. In *Contributions to the theory of partial differential equations*, Ann. of Math. Stud., no. 33, pages 167–190. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1954.
- [18] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication.
- [19] W. C. H. McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000.
- [20] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*, volume 144 of *Appl. Math. Sci.* New York, NY : Springer, 2001.
- [21] F. Rellich. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 53 :57–65, 1943.
- [22] S. A. Sauter. A refined finite element convergence theory for highly indefinite Helmholtz problems. *Computing*, 78(2) :101–115, 2006.
- [23] A. H. Schatz. An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms. *Mathematics of Computation*, 28(128) :959–962, 1974.
- [24] M. Schechter. *Principles of functional analysis.*, volume 36 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2nd ed. edition, 2001.
- [25] A. Sommerfeld. Die greensche funktion der schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 21 :309–352, 1912.
- [26] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.
- [27] C. H. Wilcox. A generalization of theorems of Rellich and Atkinson. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 :271–276, 1956.