Examens d'Analyse Complexe

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay

Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \mathbb{C}$, soit $z_0 \in \omega$, et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\omega \backslash \{z_0\})$ holomorphe en-dehors de z_0. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0, au sens où il existe un rayon $r > 0$ assez petit avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$ et il existe une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\sup_{\substack{|z-z_0|<r \\ z \neq z_0}} \big| f(z) \big| \leqslant \mathrm{M}.$$

On fixe $z_1 \in \mathbb{D}_r(z_0)$ avec $z_1 \neq z_0$.

(a) Dresser une figure illustrative complète et esthétique.

(b) Montrer, pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2} |z_1 - z_0|$, que pour tout $\zeta \in C_\varepsilon(z_0)$, on a $|\zeta - z_1| \geqslant \frac{1}{2} |z_1 - z_0|$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} \, d\zeta.$$

(d) Soient les deux points :

$$\zeta_1 := z_0 + r \, \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|},$$
$$\zeta_0 := z_0 - r \, \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}.$$

Soient aussi deux quantités petites $0 < \delta < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3} |z_1 - z_0|$. On construit le contour $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ à *deux* trous de serrure de largeur 2δ qui partent orthogonalement du cercle $C_r(z_0)$ en les deux points ζ_1 et ζ_0, avec contournement de z_1 puis de z_0 le long de cercles de rayon ε.

Dresser une nouvelle figure esthétique dans laquelle tous ces éléments apparaissent clairement — couleurs recommandées !

(e) Justifier par un théorème du cours que :

$$0 = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} \, d\zeta.$$

(f) Montrer que :

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} \, d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} - \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} \, d\zeta.$$

(g) Montrer que :

$$f(z_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} \, d\zeta.$$

(h) Justifier l'holomorphie dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ de la fonction :

$$z \longmapsto \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

(i) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\omega)$ telle que $\widetilde{f}\big|_{\omega \setminus \{z_0\}} = f$.

(j) Montrer que tout ce qui précède est encore valable en supposant plus généralement qu'il existe un exposant $0 \leqslant \alpha < 1$ et une constante $0 \leqslant \mathrm{M} < \infty$ tels que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M} \, \frac{1}{|z - z_0|^\alpha} \qquad (\forall \, 0 < |z - z_0| < r).$$

Exercice 2. Soit un nombre réel $a > 0$. L'objectif est de calculer, au moyen de la méthode des résidus, les deux intégrales de Riemann généralisées :

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx \qquad \text{et} \qquad J := \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} \, dx.$$

(a) Commencer par justifier l'existence de I.

(b) On introduit la fonction $f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}$. Calculer $\mathrm{Res}_f(i\,a)$.

(c) Avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_0^\pi \frac{d\,(\mathrm{R}\, e^{i\theta})}{(\mathrm{R}\, e^{i\theta})^2 + a^2}.$$

(e) Montrer que :

$$I = \frac{\pi}{2\,a}.$$

(f) On choisit la détermination de la fonction logarithme complexe sur :

$$\mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{R}_-,$$

définie, pour $z = r\, e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, par $\log z := \log r + i\,\theta$. Sur cet ouvert $\mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{R}_-$, on considère la fonction holomorphe :

$$g(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}.$$

Avec $0 < \varepsilon < a$ et avec $\mathrm{R} > a$, dessiner le contour orienté fermé consistant en le segment $[-\mathrm{R}, -\varepsilon]$, suivi du demi-cercle de rayon ε au-dessus de l'axe réel, suivi du segment $[\varepsilon, \mathrm{R}]$, suivi du demi-cercle de rayon R au-dessus de l'axe réel.

(g) Montrer que :

$$J = \frac{\pi}{2\,a} \log a.$$

Indication: Calculer d'abord $\mathrm{Res}_g(i\,a)$ en utilisant la valeur de $\log i$, que l'on déterminera auparavant.

Exercice 3. Dans un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continue) $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ fermée $\gamma(0) = \gamma(1)$ que l'on identifie $\gamma \equiv \gamma\big([0,1]\big)$ à son image, on définit l'*indice* de tout point $w \in \mathbb{C}\backslash\gamma$ par rapport à γ par l'intégrale :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \ := \ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

(a) Avec $\Omega := \mathbb{C}$, en utilisant deux couleurs différentes, tracer une courbe qui tourne -2 fois autour de 0, puis une autre qui tourne $+3$ fois.

(b) On introduit, pour $t \in [0,1]$, la fonction :

$$\Phi(t) \ := \ \mathsf{exp}\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-w}\, ds\right).$$

Calculer la dérivée de $t \longmapsto \frac{\Phi(t)}{\gamma(t)-w}$ sur $[0,1]$.

(c) Montrer que :

$$\Phi(t) \ = \ \frac{\gamma(t)-w}{\gamma(0)-w} \qquad\qquad (\forall\, t \in [0,1]).$$

(d) Montrer que :

$$\mathsf{Ind}_\gamma(w) \ \in \ \mathbb{Z}.$$

(e) On suppose dorénavant que l'ouvert connexe Ω est de plus *simplement connexe*. D'après le cours, si $w \in \Omega$ est un point de référence fixé, cela implique que deux courbes $\gamma_0 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow \Omega$ quelconques $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ (continues) allant de $w = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ à un autre point quelconque $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z \in \Omega$ sont toujours *homotopes* à travers une famille continue $\big\{t \longmapsto \gamma_s(t)\big\}_{s \in [0,1]}$ de courbes $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ *toutes contenues dans* Ω.

Justifier alors que toute fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}(\Omega)$ possède une *primitive* $G \in \mathscr{O}(\Omega)$ avec $G' = g$.

(f) Justifier que pour toute courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée $\gamma \subset \Omega$, on a :

$$0 \ = \ \int_\gamma g(z)\, dz \qquad\qquad (\forall\, g \in \mathscr{O}(\Omega)).$$

Maintenant, soit un ouvert connexe non vide $\omega \subset \Omega$, soit $w \in \omega$ et soit un rayon $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w) \subset \omega$. Toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}\big(\omega\backslash\{w\}\big)$ en-dehors de w se développe alors en série de Laurent :

$$f(z) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-w\right)^n,$$

normalement convergente sur les compacts de $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}(w)$, avec des coefficients donnés par la formule :

$$a_n \ := \ \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r(w)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{n+1}}\, d\zeta \qquad\qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

indépendamment du choix d'un rayon intermédiaire $0 < r < \mathrm{R}$.

(g) Avec $0 < r < \mathrm{R}$ fixé, montrer pour tout $n \leqslant -1$ que :

$$\big|a_n\big| \ \leqslant \ \max_{\zeta \in C_r(w)} \big|f(\zeta)\big| \cdot r^{-n}.$$

(h) Montrer que :

$$\limsup_{-\infty \leftarrow n} \sqrt[|n|]{|a_n|} \leqslant r.$$

(i) Montrer que le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, Z^n$$

vaut ∞.

(j) Montrer que la partie singulière :

$$h(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\, \big(z-w\big)^n$$

définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{w\}$.

(k) Montrer l'holomorphie dans ω de la fonction :

$$g := f - h \in \mathscr{O}(\omega).$$

(l) On suppose maintenant que l'ouvert connexe et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ contient un nombre fini $\mathrm{L} \geqslant 1$ de points-singularités distincts $w_1, \dots, w_{\mathrm{L}} \in \Omega$, et on considère une fonction holomorphe :

$$f \in \mathscr{O}\big(\Omega\backslash\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\}\big)$$

en-dehors de ces points, ainsi qu'une courbe $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ fermée :

$$\gamma \subset \Omega\big\backslash\big\{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\big\}.$$

Enfin, on introduit les parties singulières de f dans certains petits voisinages ouverts $\omega_\ell \ni w_\ell$:

$$h_\ell(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\ell,n}\, \big(z-w_\ell\big)^n \qquad (1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}).$$

Montrer l'holomorphie partout dans Ω de la fonction :

$$g(z) := f(z) - h_1(z) - \cdots - h_{\mathrm{L}}(z) \in \mathscr{O}(\Omega).$$

(m) Établir la *formule des résidus homologique :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\, dz = \mathsf{Ind}_\gamma(w_1)\cdot \mathsf{Res}_f(w_1) + \cdots + \mathsf{Ind}_\gamma(w_{\mathrm{L}})\cdot \mathsf{Res}_f(w_{\mathrm{L}}).$$

Exercice 4. [Sans indications] (a) Pour $\xi \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi\xi x}}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\big(1+2\,\pi\,\xi\big)\, e^{-2\pi\xi}.$$

(b) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\,\pi.$$

2. Examen 2

Exercice 1. Soit $\mathbb{D} := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \colon\ |\zeta| < 1\big\}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, soit $w \in \mathbb{D}$ fixé, et soit :

$$\varphi_w(z) \;:=\; \frac{z-w}{1-\overline{w}z}.$$

(a) Montrer que $\varphi_w \in \mathscr{O}(\mathbb{D}) \cap \mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{D}}\big)$.

(b) Montrer que $\big|\varphi_w(z)\big| = 1$ pour tout $|z| = 1$, puis que $\big|\varphi_w(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$, et enfin que $\big|\varphi_w(z)\big| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(c) Soit une suite infinie $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de points *non nuls* $z_n \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ satisfaisant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) \;<\; \infty.$$

On pose :

$$F_n(z) \;:=\; \frac{|z_n|}{z_n}\,\frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z} \qquad\qquad {\scriptstyle (z\,\in\,\mathbb{D})}.$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, montrer que :

$$\big|F_n(z) - 1\big| \;\leqslant\; \frac{1+|z|}{1-|z|}\,\big(1 - |z_n|\big).$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité $\frac{1}{|1-\overline{z}_n z|} \leqslant \frac{1}{1-|z|}$.

(d) Montrer que le produit infini $F(z) := \prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{D}$. Indication: On rappelle qu'un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} F_n(z)$ est dit *normalement convergent* sur un compact $K \subset \mathbb{D}$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n(z) - 1\big)$ est normalement convergente sur K.

(e) Montrer que $\big|F(z)\big| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(f) Quel problème la fonction $F(z)$ résout-elle ?

(g) Maintenant, soit une fonction holomorphe $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ *non constante*, avec $f(0) = 0$. Pour $w \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ non nul, on note :

$$f^{-1}(w) \;:=\; \big\{z \in \mathbb{D} \colon\ f(z) = w\big\}.$$

On suppose Card $f^{-1}(w) = \infty$.

Justifier que l'on peut écrire :

$$f^{-1}(w) \;=\; \big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty},$$

avec $z_n \in \mathbb{D}$ et :

$$1 \;=\; \lim_{n\to\infty} |z_n|.$$

(h) On pose :

$$g(z) \;:=\; \varphi_w\big(f(z)\big),$$

en rappelant que $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$. Montrer que $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(i) Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, on pose :

$$B_{\mathrm{N}}(z) := \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z}.$$

Montrer qu'il existe $h_{\mathrm{N}} \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$ telle que :

$$g(z) = B_{\mathrm{N}}(z)\, h_{\mathrm{N}}(z) \qquad\qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

(j) Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ (censé être arbitrairement proche de 0), il existe un rayon $0 < r_\varepsilon < 1$ (censé être proche de 1) tel que :

$$\big|B_{\mathrm{N}}(z)\big| \geqslant 1 - \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, |z| = r_\varepsilon).$$

(k) Montrer que $\big|h_{\mathrm{N}}(0)\big| \leqslant 1$.

(l) On introduit maintenant la *fonction de comptage de Nevanlinna :*

$$\begin{aligned} N_f(w) &:= \sum_{z \in f^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|}. \end{aligned}$$

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_n|} \leqslant \log \frac{1}{|w|}.$$

(m) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty.$$

(n) Soit maintenant $F \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$, bornée $\big|F(z)\big| \leqslant \mathrm{M} < \infty$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et non identiquement nulle $F \not\equiv 0$. Soient $\big\{z_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ ses zéros, supposés en nombre infini. On suppose temporairement que $\mathrm{M} = 1$ et que $F(0) \neq 0$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - |z_n|\big) < \infty$. Indication: Introduire :

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{1 - \overline{F(0)}\, F(z)}.$$

(o) Montrer que cela se généralise sans supposer $\mathrm{M} = 1$ et $F(0) \neq 0$.

(p) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème synthétique.

Exercice 2. **(a)** Montrer que la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ de Riemann satisfait, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser à la formule de produit infini d'Euler, vue en cours.

(b) Justifier que $\zeta(s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, puis justifier l'existence et l'holomorphie d'une fonction $s \longmapsto \log \zeta(s)$ définie dans $\{\mathrm{Re}\, s > 1\}$ et prenant des valeurs réelles sur $]1, \infty[$.

(c) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1$, on a encore :

$$\log \zeta(s) \,=\, \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Indication: Penser au principe d'unicité pour les fonctions holomorphes qui coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation.

(d) Toujours pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, montrer que :

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la *fonction de von Mangoldt :*

$$\Lambda(n) \,:=\, \begin{cases} \log p & \text{lorsque } n = p^\alpha \text{ avec } p \in \mathscr{P} \text{ et } \alpha \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(e) Pour $c > 1$ *fixé*, en notant comme Riemann $s = \sigma + it$, on considère la droite réelle verticale $\big\{c + it \colon -\infty < t < \infty\big\}$ orientée du bas vers le haut. Soit l'intégrale dépendant du paramètre $a > 0$:

$$I(a) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds.$$

Montrer qu'elle converge. Indication: $\big|a^s\big| = a^c$.

(f) On suppose dorénavant, jusqu'à la Question **(j)** ci-dessous, que $a \geqslant 1$. Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$f(s) \,:=\, \frac{a^s}{s(s+1)}.$$

Calculer $\mathrm{Res}_f(0)$, puis $\mathrm{Res}_f(-1)$.

(g) Avec un rayon $\mathrm{R} > 1 + c$ (qui tendra vers l'infini), on considère le contour orienté Γ_{R}^- consistant en le segment vertical $\big[c - i\mathrm{R},\, c + i\mathrm{R}\big]$ parcouru du bas vers le haut, suivi du demi-cercle C_{R}^- centré en c de rayon R situé à gauche de l'axe vertical $\{\mathrm{Re}\, s = c\}$. Dessiner Γ_{R}^- avec tous les détails possibles.

(h) Trouver la valeur de :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds \,=\, \textbf{?}.$$

(i) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_{C_{\mathrm{R}}^-} f(s)\, ds.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité valable pour tous rayons $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}_c \gg 1$ assez grands :

$$\big|s\,(s+1)\big| \,\geqslant\, \tfrac{1}{2}\, \mathrm{R}^2.$$

(j) Toujours avec $c > 1$ fixé, montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s\,(s+1)}\, ds \,=\, \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} & \text{quand } 1 \leqslant a, \\ 0 & \text{quand } 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

Indication: Changer de demi-cercle, et faire d'abord une figure (notée !).

(k) On introduit maintenant la *fonction psi* de Tchebychev :

$$\psi(x) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n),$$

puis :

$$\psi_1(x) := \int_1^x \psi(u)\, du.$$

Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^x \Lambda(n)\, \mathbf{1}_{[n,\infty[}(u)\, du.$$

(l) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \Lambda(n) \cdot \big(x - n\big).$$

(m) Montrer que pour tout $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement dans $\big\{\mathrm{Re}\, s > 1 + \delta\big\}$.

(n) Montrer que :

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bigg(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\bigg) \frac{x^{s+1}}{s\,(s+1)}\, ds.$$

Exercice 3. Soit $\tau \in \mathbb{C}$ fixé avec $\mathrm{Im}\, \tau > 0$.

(a) Montrer que la *fonction Thêta de Jacobi* définie par :

$$\Theta_\tau(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}\, e^{2i\pi n z} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

est une fonction holomorphe entière. Indication: Poser $t := \mathrm{Im}\, \tau > 0$, et observer que pour $\frac{4\,|z|}{t} \leqslant |n|$, on a $-n^2 t + 2\,|n|\,|z| \leqslant -n^2\, \frac{t}{2}$.

(b) Montrer qu'il existe deux constantes $0 < \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ telles que :

$$\big|\Theta_\tau(z)\big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\,|z|^2} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

(c) Montrer que la fonction :

$$f(z) := z + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} e^{i\pi n^2 \tau}\, \frac{e^{2i\pi n z}}{2i\pi n}$$

est une fonction holomorphe entière *non constante*. Indication: Observer que $f(x) \longrightarrow \infty$ lorsque $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow \infty$.

(d) Montrer que Θ_τ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. Indication: Vérifier que $f' = \Theta_\tau$.

(e) Montrer que $\Theta_\tau\big(z + m\tau\big) = e^{-i\pi m^2 \tau}\, e^{-2i\pi m z}\, \Theta_\tau(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$.

(f) Montrer que Θ_τ est une fonction holomorphe entière d'ordre exactement égal à 2.

3. Examen 3

Exercice 1. On note $C := \big\{ z = x + i\,y \in \mathbb{C} \colon\ x^2 + y^2 = 1 \big\}$ le cercle unité dans $\mathbb{C}$. L'objectif est de calculer des intégrales de la forme :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt,$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients réels :

$$R(x,y) \,=\, \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad \text{avec deux polynômes } \ P(x,y),\, Q(x,y) \,\in\, \mathbb{R}[x,y],$$

dont le dénominateur $Q(x,y)$ n'a pas de pôle sur C, c'est-à-dire que $Q\big|_C \neq 0$. À $R(x,y)$, on associe la fonction :

$$f(z) \,:=\, \frac{1}{i\,z}\, R\Big(\frac{z^2+1}{2\,z},\, \frac{z^2-1}{2i\,z}\Big).$$

On rappelle que C est le bord du disque unité $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$.

(a) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t,\, \sin t\big)\, dt \,=\, 2i\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{D}} \mathrm{Res}_f(z_0).$$

Indication: Écrire $z = e^{it}$ sur le cercle unité C.

(b) Pour un paramètre réel $a > 1$, soit l'exemple :

$$R(x,y) \,:=\, \frac{1}{a+y}.$$

Déterminer les deux pôles z_1 et z_2 de la fonction $f(z)$ associée, avec $|z_1| < |z_2|$. Indication: Ne pas faire d'erreur de calcul ! z_1 et z_2 sont tous deux imaginaires purs.

(c) Calculer $\mathrm{Res}_f(z_1)$ en fonction de z_1 et de z_2.

(d) Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t}\, dt \,=\, \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 2. Soit $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur le disque unité $\mathbb{D} = \big\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \big\}$ qui est *bornée*, au sens où il existe une constante $\mathrm{M} < \infty$ telle que $\big|f(z)\big| \leqslant \mathrm{M}$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. On suppose que $f\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, *uniformément* pour $t \in \big[0, \frac{\pi}{4}\big[$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|f\big(r\,e^{it}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, t \,\in\, \big[0, \tfrac{\pi}{4}\big[\Big).$$

(a) On introduit la fonction auxiliaire définie par :

$$g(z) \,:=\, \prod_{k=0}^{7} f\big(z\, e^{-i\frac{k\pi}{4}}\big) \qquad {\scriptstyle (z \in \mathbb{D})}.$$

Vérifier que $g \in \mathscr{O}(\mathbb{D})$.

(b) Montrer que :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, r_\varepsilon < 1 \quad \Big(r_\varepsilon < r < 1 \quad \Longrightarrow \quad \big|g\big(r\,e^{i\theta}\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall\,\theta \in \mathbb{R}\Big).$$

(c) Montrer que $g \equiv 0$.

(d) Montrer que $f \equiv 0$.

(e) Tout cela serait-il encore vrai si, pour un entier $n \geqslant 1$ fixé, on supposait que $f\big(r\,e^{i\theta}\big)$ converge vers 0 lorsque $r \overset{<}{\longrightarrow} 1$, uniformément pour tout $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2n}\big[$ **?**

Exercice 3. Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, soit un ouvert Ω qui contient le demi-plan supérieur fermé :

$$\Omega \supset \overline{\mathbb{H}}^+ := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Im}\,z \geqslant 0\big\}.$$

Soit aussi une fonction holomorphe dans cet ouvert :

$$f \in \mathscr{O}\Big(\Omega \backslash \big\{a_1, \dots, a_{\mathrm{K}}\big\}\Big),$$

en-dehors d'un nombre fini $\mathrm{K} \geqslant 1$ de points $a_1, \dots, a_{\mathrm{K}} \in \mathbb{H}^+$ tous contenus dans le demi-plan supérieur ouvert $\mathbb{H}^+ := \big\{\mathsf{Im}\,z > 0\big\}$. L'objectif est de démontrer que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\,e^{ix}\,dx \;=\; 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathsf{Res}\,\big(f(z)e^{iz},\, a_k\big),$$

sous l'hypothèse que :

$$0 \;=\; \lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \big|f\big(r\,e^{i\theta}\big)\big|,$$

et d'appliquer ensuite cette formule générale dans un cas spécifique concret.

(a) Soient deux angles $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \pi$, soit un rayon $r_1 > 0$, et soit une fonction h continue dans le secteur angulaire fermé :

$$\overline{S}_{\theta_1,\theta_2}^{r_1} := \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ r_1 \leqslant |z|,\ \ \theta_1 \leqslant \mathsf{Arg}z \leqslant \theta_2\big\}.$$

Dessiner soigneusement ce secteur $\overline{S}_{\theta_1,\theta_2}^{r_1}$.

(b) Sans chercher à la démontrer au moyen d'inégalités, justifier par un dessin accompagné d'explications éclairantes l'inégalité classique suivante, valable pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\sin\theta \;\geqslant\; \frac{2}{\pi}\,\theta.$$

(c) Montrer que :

$$\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin\theta}\, r\,d\theta \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}.$$

(d) Soit une fonction continue $h \in \mathscr{C}^0\big(\overline{S}_{\theta_1,\theta_2}^{r_1}\big)$. On introduit, pour tout rayon $r \geqslant r_1$, les quantités :

$$M_h(r) \;=\; \max_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} \big|h\big(r\,e^{i\theta}\big)\big|,$$

ainsi que les arcs de cercle :

$$C_{\theta_1,\theta_2}^r := \big\{r\,e^{i\theta}\colon\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\big\}.$$

Montrer que :

$$\left| \int_{C^r_{\theta_1,\theta_2}} h(z)\, e^{iz}\, dz \right| \leqslant M_h(r) \cdot \pi.$$

(e) En déduire que :

$$0 = \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_0^\pi f\big(\mathrm{R}\, e^{i\theta}\big)\, e^{i\,\mathrm{R}\, e^{i\theta}}\, i\, \mathrm{R}\, e^{i\theta}\, d\theta.$$

(f) Conclure, en détaillant précisément tous les arguments, que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{Res}\big(f(z)e^{iz},\, a_k\big).$$

(g) Montrer, pour tout $r \geqslant 4$, que :

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{1}{r\, e^{i\theta}} + \frac{1}{(r\, e^{i\theta})^2}} \right| \leqslant 2,$$

et ensuite, déterminer les deux racines complexes a et b du polynôme $z^2 + z + 1$.

(h) Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + x + 1}\, dx = \frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\cos \tfrac{1}{2} - i \sin \tfrac{1}{2}\Big).$$

Exercice 4. Sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, le célèbre *Théorème de Weierstrass* stipule que toute fonction continue $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ peut être approximée à volonté en norme uniforme par de simples polynômes :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P = P_\varepsilon(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{tel que} \quad \max_{x\in[a,b]} \big|f(x) - P(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Existe-t-il un résultat similaire en Analyse Complexe ? Tout devient 2-dimensionnel ! On va regarder un compact quelconque $K \subset \mathbb{C}$, éventuellement d'intérieur non vide, et des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage ouvert $\Omega \supset K$, éventuellement très « resserré » autour de K. Dans ces circonstances, a-t-on :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon\, \textbf{?}$$

Cela serait un résultat remarquable, car les polynômes sont des objets globaux, définis pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(a) Soit une série entière $\sum_{n=0}^\infty a_n\, z^n$ à coefficients complexes $a_n \in \mathbb{C}$, dont le rayon de convergence R satisfait :

$$0 < \mathrm{R} < \infty.$$

Justifier, pour tout $\delta > 0$, l'existence d'un (grand) entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, on ait :

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{\mathrm{R}} + \delta.$$

(b) Soit un compact $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ contenu dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ de rayon R centré en l'origine $0 \in \mathbb{C}$. Vérifier qu'il existe $0 < r < \mathrm{R}$ tel que $K \subset \overline{\mathbb{D}}_r$.

(c) En choisissant $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$q := \Big(\frac{1}{\mathrm{R}} + \delta\Big)\, r < 1,$$

montrer, pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, l'inégalité valable quel que soit $z \in K$:

$$\bigg|\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} a_n\, z^n\bigg| \leqslant q^{\mathrm{N}}\, \frac{1}{1-q}.$$

(d) En raisonnant très précisément, toujours avec $K \subset \mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ compact, établir la propriété attendue :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P(z) \in \mathbb{C}[z] \quad \text{tel que} \quad \max_{z\in K} \big|f(z) - P(z)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 5. Soit $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$ le disque de rayon $\mathrm{R} > 1$ centré en $0 \in \mathbb{C}$, et soit un point $\zeta_0 \in C = \partial\mathbb{D}_1$ sur le cercle unité, *i.e.* avec $|\zeta_0| = 1$. L'objectif est d'étudier les fonctions méromorphes $f \in \mathscr{M}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\big) \cap \mathscr{O}\big(\mathbb{D}_{\mathrm{R}}\backslash\{\zeta_0\}\big)$ qui ont un unique pôle simple (d'ordre 1) en ζ_0.

(a) Faire une figure, et justifier que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ se développe à l'origine en une série entière qui converge pour $|z| < 1$.

(b) Montrer qu'il existe une constante non nulle $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que la fonction auxiliaire :

$$g(z) := f(z) - \frac{\alpha}{z - \zeta_0}$$

soit holomorphe dans $\mathbb{D}_{\mathrm{R}}$. Comment appelle-t-on α ?

(c) Montrer que les coefficients b_n du développement en série entière $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ satisfont $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Montrer que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, puis établir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta_0$, et enfin, interpréter intelligemment ce résultat.

Exercice 6. [Sans indications] Sur le cercle unité $C := \big\{|z| = 1\big\}$, soient $n \geqslant 1$ points $w_1 = e^{it_1}, \dots, w_n = e^{it_n}$ avec $0 \leqslant t_k < 2\pi$ pour $k = 1, \dots, n$.

(a) Trouver (au moins) un point $z^* = e^{i\theta^*} \in C$ satisfaisant :

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \big|z^* - w_k\big| = 1.$$

4. Examen 4

Exercice 1. L'objectif ici est de produire une démonstration simplifiée, due à Landau, de la dernière partie (difficile) de la démonstration du théorème de factorisation de Hadamard pour les fonctions entières d'ordre fini. Des préliminaires sont nécessaires.

(a) Soit un rayon $\mathrm{R} > 0$, soit un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0) = \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, et soit une fonction holomorphe $\varphi \colon \omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que $\big|\varphi(z)\big| \leqslant \mathrm{S} < \infty$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$ et que $\varphi(0) = 0$. Montrer que :

$$\big|\varphi(z)\big| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\,|z| \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}).$$

Indication: Utiliser $\frac{\varphi(z)}{z}$.

(b) Soient encore $\mathrm{R} > 0$ et $\Omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$ un autre ouvert. Pour toute $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ et tout rayon intermédiaire $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, on note :

$$\boldsymbol{M}_h(r) := \max_{|z|=r} \big|h(z)\big| \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \boldsymbol{A}_h(r) := \max_{|z|=r} \operatorname{Re} h(z).$$

On note aussi $C_r := \{|z| = r\}$. On supposera toujours que $h(0) = 0$ et que h est non constante. On admettra la propriété $0 < \boldsymbol{A}_h(r) < \boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})$ pour $0 < r < \mathrm{R}$, conséquence élémentaire du principe du maximum. On introduit :

$$\varphi(z) := \frac{h(z)}{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}) - h(z)}.$$

Vérifier, pour $|z| = r$ et $0 \leqslant r \leqslant \mathrm{R}$, que :

$$\operatorname{Re}\big(2\boldsymbol{A}_h(r) - h(z)\big) \geqslant \boldsymbol{A}_h(r),$$

et montrer que φ est holomorphe dans un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}_R$.

(c) On décompose en parties réelle et imaginaire $h(z) = u(z) + i\,v(z)$. Montrer que $\big|\varphi(z)\big|^2 \leqslant 1$ pour tout $|z| \leqslant \mathrm{R}$.

(d) Montrer que :

$$\big|h(z)\big| \leqslant \frac{2\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R})\,|z|}{\mathrm{R} - |z|}.$$

(e) En déduire l'*inégalité de Borel-Carathéodory*, valable pour tout rayon $0 \leqslant r < \mathrm{R}$:

$$\boldsymbol{M}_h(r) \leqslant \frac{r + r}{\mathrm{R} - r}\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(f) Maintenant, on souhaite généraliser cette inégalité aux dérivées de h d'ordre quelconque. Soit un rayon intermédiaire quelconque $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, et soit $z \in C_r$ arbitraire. On pose :

$$\rho := \tfrac{\mathrm{R}-r}{2},$$

et on introduit :

$$C_\rho(z) := \big\{\zeta \in \mathbb{C} \colon\ |\zeta - z| = \rho\big\}.$$

Dresser une figure élégante.

(g) Montrer que :

$$\max_{|\zeta - z| = \rho} \big|h(\zeta)\big| \leqslant \frac{4\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}-r}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(h) Montrer que pour tout $0 \leqslant r < \mathrm{R}$ et tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\max_{|z|=r} \big|h^{(n)}(z)\big| \leqslant \frac{2^{n+2}\,n!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{n+1}}\,\boldsymbol{A}_h(\mathrm{R}).$$

(i) Maintenant, soit $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière avec $f(0) = 1$ dont l'ordre de croissance $\rho_f < \infty$ est fini. Soit $\kappa := \mathsf{Ent}\,\rho_f$, d'où $\kappa \leqslant \rho_f < \kappa + 1$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, en posant $\rho := \rho_f + \varepsilon$, on a encore $\kappa \leqslant \rho < \kappa + 1$, et il existe par définition une constante $C > 0$ telle que :

$$\big|f(z)\big| \leqslant C\,e^{|z|^\rho} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

On suppose que f possède un nombre *infini* de zéros isolés $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ordonnés par modules croissants $0 < |a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ et répétés ν fois aux zéros d'ordre $\nu \geqslant 2$. Ainsi, $f(z) = 0$ si et seulement si $z = a_n$ pour un $n \geqslant 1$.

En cours au tableau, on a démontré que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\kappa+1}} < \infty.$$

Ensuite dans le polycopié, en introduisant les facteurs canoniques à exponentielle polynomiale de degré κ :

$$E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) := \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

on a aussi démontré la convergence normale sur les compacts de $\mathbb{C}$ du produit infini :

$$\Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big).$$

Comme $f(z)$ et $\Pi(z)$ ont les mêmes zéros, les singularités de $\frac{f(z)}{\Pi(z)}$ sont éliminables, cette fonction n'a aucun zéro, d'où il découle comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe que son logarithme existe, et par conséquent on peut écrire :

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_\kappa\big(\tfrac{z}{a_n}\big) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \tfrac{z}{a_n}\big)\,e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}(\frac{z}{a_n})^\kappa},$$

au moyen d'une certaine fonction holomorphe entière $Q \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$.

En admettant ces résultats, la fin difficile de la démonstration du Théorème de factorisation de Hadamard consistait à établir que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est alors nécessairement un polynôme de degré $\leqslant \kappa$. Les arguments qui suivent, dus à Landau et tirés du traité de Titchmarsh, offrent une alternative élégante à la démonstration originale vue en cours.

Justifier très rapidement la formule dans $\mathbb{C} \backslash \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = Q'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \bigg(-\frac{1}{a_n - z} + \frac{d}{dz}\Big[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^2 + \cdots + \frac{1}{\kappa}\Big(\frac{z}{a_n}\Big)^\kappa\Big]\bigg).$$

(j) Soit un rayon arbitraire $\mathrm{R} > 0$. On introduit la fonction :

$$g_{\mathrm{R}}(z) \,:=\, \frac{f(z)}{\prod_{|a_n|\leqslant \mathrm{R}} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}.$$

Montrer qu'il existe un ouvert $\omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}(0)$ et une fonction holomorphe $h_{\mathrm{R}} \in \mathscr{O}(\omega)$ avec $h_{\mathrm{R}}(0) = 0$ satisfaisant $e^{h_{\mathrm{R}}(z)} = g_{\mathrm{R}}(z)$.

(k) Montrer qu'en tout point $z \in \omega \supset \overline{\mathbb{D}}_{\mathrm{R}}$, on a :

$$Q^{(\kappa+1)}(z) \,=\, h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z) + \sum_{|a_n|>\mathrm{R}} \frac{\kappa!}{(a_n - z)^{\kappa+1}}.$$

Indication: On admettra, sans chercher à la justifier, la dérivabilité terme à terme.

(l) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leqslant 2\,\mathrm{R}$, on a :

$$\big|g_{\mathrm{R}}(z)\big| \,\leqslant\, C\, e^{(2\,\mathrm{R})^\rho}.$$

(m) Montrer que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_r$ avec $0 \leqslant r < \mathrm{R}$, on a :

$$\big|h_{\mathrm{R}}^{(\kappa+1)}(z)\big| \,\leqslant\, \frac{2^{\kappa+3}\,(\kappa+1)!\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-r)^{\kappa+2}}\,\left[\log C + \big(2\,\mathrm{R}\big)^\rho\right].$$

(n) Démontrer que $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant \kappa$.

Exercice 2. Pour deux rayons quelconques $\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1 > 0$ et deux autres rayons quelconques $\mathrm{R}_2' > \mathrm{R}_1' > 0$, on introduit dans l'espace des $z = x + i\,y$ et dans l'espace des $z' = x' + i\,y'$ les anneaux ouverts :

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2} \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\big\} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{A}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'} \,:=\, \big\{z' \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{R}_1' < |z'| < \mathrm{R}_2'\big\}.$$

Les anneaux fermés où les '$<$' sont remplacés par des '$\leqslant$' seront notés $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2}$ et $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{R}_1',\mathrm{R}_2'}$.

Grâce au biholomorphisme $z \longmapsto \frac{z}{\mathrm{R}_1}$ de $\mathbb{C}^*$ et grâce à $z' \longmapsto \frac{z'}{\mathrm{R}_1'}$, on se ramène à $\mathrm{R}_1 = 1$ et à $\mathrm{R}_1' = 1$, et on note alors $\mathrm{R} := \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1} > 1$ et $\mathrm{R}' := \frac{\mathrm{R}_2'}{\mathrm{R}_1'} > 1$.

L'objectif est d'établir qu'un anneau $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ est biholomorphe à un autre anneau $\boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$ si et seulement si $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

On se ramène évidemment à $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$, et on suppose donc qu'il existe un biholomorphisme $f\colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, d'inverse holomorphe $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xleftarrow{\sim} \boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'} : f^{-1}$. On le note $z \longmapsto f(z) = z'$ et on note son inverse $z = f^{-1}(z') \longleftarrow z'$.

(a) Dans l'espace d'arrivée, soient des rayons intermédiaires quelconques $1 < \mathrm{P}' < \mathrm{Q}' < \mathrm{R}'$. Montrer que l'ensemble :

$$K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'} \,:=\, \big\{z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}\colon\ \mathrm{P}' \leqslant |f(z)| \leqslant \mathrm{Q}'\big\}$$

est un compact de l'ouvert $\mathrm{A}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Penser à f^{-1}.

(b) En notant $C_r = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = r\}$, on introduit les deux distances strictement positives :

$$d \,:=\, \mathsf{dist}\big(C_1,\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) \,>\, 0 \qquad \text{et} \qquad e \,:=\, \mathsf{dist}\big(C_{\mathrm{R}},\, K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}\big) \,>\, 0,$$

puis on abrège :

$$\mathrm{D} \,:=\, 1 + d \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} \,:=\, \mathrm{R} - e.$$

Sur une figure de qualité, représenter précisément $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, f, $\boldsymbol{A}'_{1,\mathrm{R}'}$, f^{-1}, $\overline{\boldsymbol{A}}'_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, $K_{\mathrm{P}',\mathrm{Q}'}$, et aussi, mais dans une couleur distinctive, $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}$, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{E},\mathrm{R}}$.

(c) On considère l'application réelle $|f|\colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow]1, \mathrm{R}'[$ définie par $z \longmapsto |f(z)|$, plus simple à étudier que f. Montrer que l'ensemble :

$$|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \,=\, \big\{|f(z)| \in \mathbb{R}_+ :\ 1 < |z| < \mathrm{D}\big\},$$

est un intervalle ouvert connexe non vide, contenu ou bien dans $]1, \mathrm{P}'[$, ou bien dans $]\mathrm{Q}', \mathrm{R}'[$.

(d) * Montrer que :

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\,\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big|$$

existe, et vaut ou bien 1, ou bien R'. Indication: Quand $|f|\big(\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{D}}\big) \subset]1, \mathrm{P}'[$, montrer que cette limite vaut 1.

(e) Après un changement éventuel d'application $f \longmapsto \frac{\mathrm{R}'}{f}$ qui échange $1 \longleftrightarrow \mathrm{R}'$, on se ramène à :

$$\lim_{\substack{|z|\to 1\\ z\,\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \,=\, 1.$$

Montrer qu'on a alors :

$$\lim_{\substack{|z|\to \mathrm{R}\\ z\,\in A_{1,\mathrm{R}}}} \big|f(z)\big| \,=\, \mathrm{R}',$$

et conclure que $|f|$ se prolonge par continuité à l'anneau fermé $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$.

(f) On suppose temporairement pour simplifier que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}^n$ pour un certain entier $n \geqslant 1$. On introduit la fonction $g\colon \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$g(z) \,=\, z^{-n}\, f(z).$$

Montrer qu'il existe une constante $\beta \in \mathbb{R}$ telle que :

$$g(z) \,=\, e^{i\beta} \qquad\qquad (\forall\, z \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}).$$

(g) En déduire que $n = 1$, et donc, que $\mathrm{R}' = \mathrm{R}$.

(h) On traite maintenant le cas général où $\mathrm{R}' \geqslant \mathrm{R} > 1$ n'est pas forcément égal à une puissance R^n. On introduit :

$$\mathsf{p} \,:=\, \frac{\log \mathrm{R}'}{\log \mathrm{R}} \qquad\quad \text{et} \qquad\quad \phi(z) \,:=\, \frac{|f(z)|}{|z|^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, z \in \overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}).$$

L'objectif est de démontrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$. Que vaut $\phi\big|_{\partial A_{1,\mathrm{R}}}$? On suppose par l'absurde qu'il existe $w \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$ avec :

$$\max_{z\,\in \overline{A}_{1,\mathrm{R}}} \phi(z) \,=\, \phi(w) \,>\, 1.$$

Soit le demi-anneau ouvert :

$$\boldsymbol{C}_w \,:=\, \boldsymbol{D}_{iw}^{+} \cap \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}},$$

où $\boldsymbol{D}_{iw}^{+}$ est le demi-plan ouvert contenant w qui est bordé par la droite $\boldsymbol{D}_{iw}$ engendrée par l'origine 0 et par iw, de telle sorte que :

$$\max_{\overline{A}_{1,\mathrm{R}}} \phi \,=\, \max_{\overline{C}_w} \phi \,=\, \phi(w).$$

Dresser une figure contenant 0, $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$, w, iw, $\boldsymbol{D}_{iw}$, $\boldsymbol{D}_{iw}^{+}$, $\boldsymbol{C}_w$, puis, justifier intuitivement la simple connexité de $\boldsymbol{C}_w$.

(i) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathscr{O}\big(\boldsymbol{C}_w\big)$ telle que $\big|g(z)\big| = |z|^{-\mathsf{p}}$ pour tout $z \in \boldsymbol{C}_w$.

(j) Montrer que $\phi(z) \leqslant 1$ sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}$. Indication: Dériver une contradiction en examinant ce qui se passe sur $\partial\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \partial\boldsymbol{C}_w$.

(k) Modifier/adapter les raisonnements pour démontrer symétriquement que $\phi \geqslant 1$.

(l) Soit maintenant $\log z$ la détermination principale du logarithme, fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ satisfaisant $\log 1 = 0$. Montrer que la fonction :

$$h(z) := e^{-\mathsf{p}\log z} f(z)$$

est holomorphe dans $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$, continue sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$ et qu'elle est de module constant $\big|h(z)\big| \equiv 1$.

(m) Montrer que h est constante sur $\overline{\boldsymbol{A}}_{1,\mathrm{R}}\big\backslash\mathbb{R}_-$.

(n) Soit un point quelconque $z_0 \in \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \mathbb{R}_-$. On note $\boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}^{\pm} := \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \cap \big\{ \pm \operatorname{Im} z > 0 \big\}$. En comparant les deux limites :

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^{-}}} h(z) \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A_{1,\mathrm{R}}^{+}}} h(z),$$

montrer que $\mathsf{p} \in \mathbb{Z}$.

(o) Conclure.

(p) Déterminer tous les biholomorphismes $f : \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}} \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{A}_{1,\mathrm{R}}$.

(q) Existe-t-il une application holomorphe surjective $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$?

5. Examen 5

Exercice 1. On introduit les deux fonctions définies pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$f(z) := \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} \qquad \text{et} \qquad g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}.$$

(a) Justifier que f est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que g est holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Indication: Avec $\mathrm{N} \geqslant 1$ entier, décomposer :

$$g(z) = \sum_{|n| \leqslant \mathrm{N}} \frac{1}{(n-z)^2} + \sum_{|n| \geqslant \mathrm{N}+1} \frac{1}{(n-z)^2},$$

et en supposant $|z| < \mathrm{N}$, majorer la deuxième somme par une série normale convergente.

(c) Montrer que f et g ont des pôles d'ordre 2 en $z = 0$, puis déterminer leurs parties singulières $\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z}$ et $\frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-1}}{z}$ dans leurs développements de Laurent respectifs. Indication: Observer que f est paire.

(d) Justifier que f et g sont 1-périodiques.

(e) Montrer que la fonction $h := f - g$ se prolonge en une fonction holomorphe entière et qu'elle est 1-périodique.

(f) On introduit le fermé :

$$\Pi := \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \ -\tfrac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant \tfrac{1}{2}, \ \ |\mathrm{Im}\, z| \geqslant 1 \right\}.$$

Dessiner Π soigneusement.

(g) Établir que f et g sont bornées en module sur Π.

(h) Montrer que h est bornée sur $\mathbb{C}$, puis qu'elle est constante.

(i) Montrer que :

$$\lim_{y \to \infty} f(i\,y) = 0 = \lim_{y \to \infty} g(i\,y).$$

(j) En effectuant la synthèse des questions qui précèdent, établir la formule, belle :

$$\frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi\, z)\big)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}. \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}).$$

(k) En déduire la valeur exacte de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un contour $\mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}$ de Jordan, et soit $\Omega \supset \Gamma \cup \Gamma_{\mathsf{int}}$ un ouvert qui le contient ainsi que son domaine intérieur Γ_{int}. On suppose données deux fonctions holomorphes $f, g \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui satisfont partout sur ce contour l'inégalité :

$$|g(z)| \; < \; |f(z)| \qquad\qquad (\forall\, z \in \Gamma).$$

On envisage alors la fonction $f + g$ comme une « perturbation » de f.

(a) On introduit la famille à un paramètre réel $t \in [0,1]$ de fonctions holomorphes $f_t(z) := f(z) + t\, g(z)$ dans Ω. Montrer que la fonction :

$$\mathrm{N}(t) \; := \; \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz$$

est bien définie et qu'elle est *continue* de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

(b) Quelles valeurs peut prendre alors $\mathrm{N}(t)$? Indication: Sans chercher à reconstituer une démonstration, justifier la réponse en une ou deux lignes par un simple appel au cours.

(c) Montrer, avec multiplicités, l'égalité :

$$\#\,\mathsf{zéros}\,\big(f + g\big) \; = \; \#\,\mathsf{zéros}\,(f) \qquad\qquad (\text{dans } \Gamma_{\mathsf{int}}).$$

(d) Soit le polynôme $P(z) := 3\, z^{15} + 4\, z^8 + 6\, z^5 + 19\, z^4 + 3\, z + 2$. Montrer que P admet exactement 4 zéros dans le disque unité $\{|z| < 1\}$.

(e) Montrer que $P(z)$ admet exactement 11 zéros dans l'anneau $\big\{1 < |z| < 2\big\}$.

Exercice 3. L'objectif est, pour des réels quelconques $a, b > 0$, d'établir en détail la formule :

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+a)^2 + b^2}\, dx \; = \; \frac{\log \sqrt{a^2+b^2}}{b}\, \operatorname{arctan} \frac{b}{a}.$$

(a) Soient des réels δ, ε, R quelconques satisfaisant :

$$0 \; < \; \delta \; < \; \varepsilon \; < \; 1 \qquad\qquad \text{ainsi que} \qquad\qquad \max\big(1,\, \sqrt{a^2+b^2}\big) \; < \; \mathrm{R}.$$

On introduit le cercle c_ε de centre 0 et de rayon ε, le cercle C_{R} de centre 0 et de rayon R, ainsi que les deux segments horizontaux :

$$\begin{aligned} I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \; &:= \; \Big\{ z \in \mathbb{C} \colon\; \mathsf{Im}\, z = \delta,\; \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2} \Big\}, \\ I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}} \; &:= \; \Big\{ z \in \mathbb{C} \colon\; \mathsf{Im}\, z = -\,\delta,\; \sqrt{\varepsilon^2 - \delta^2} \leqslant \mathsf{Re}\, z \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - \delta^2} \Big\}. \end{aligned}$$

Enfin, on introduit les deux grands arcs de cercles $c_{\delta,\varepsilon} \subset c_\varepsilon$ et $C_{\delta,\mathrm{R}} \subset C_{\mathrm{R}}$ définis par :

$$\begin{aligned} c_{\delta,\varepsilon} \; &:= \; c_\varepsilon \big\backslash \big\{ \mathsf{Re}\, z > 0,\; -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta \big\}, \\ C_{\delta,\mathrm{R}} \; &:= \; C_{\mathrm{R}} \big\backslash \big\{ \mathsf{Re}\, z > 0,\; -\delta < \mathsf{Im}\, z < \delta \big\}. \end{aligned}$$

Dessiner très soigneusement le contour de Jordan $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ en forme de *trou de serrure*, orienté dans le sens trigonométrique, que délimitent la succession des quatre courbes $C_{\delta,\mathrm{R}}$, $I^-_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, $c_{\delta,\varepsilon}$, $I^+_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}$, et signaler l'orientation de chacune de ces courbes sur la figure.

(b) On abrège $\rho := \sqrt{a^2+b^2}$. Montrer que :

$$\begin{aligned} -\,a + i\, b \; &= \; \rho\, e^{i\,\varphi_+}, \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \varphi_+ \; := \; \pi - \operatorname{arctan}\big(\tfrac{b}{a}\big), \\ -\,a - i\, b \; &= \; \rho\, e^{i\,\varphi_-}, \qquad\qquad \text{où} \qquad\qquad \varphi_- \; := \; \pi + \operatorname{arctan}\big(\tfrac{b}{a}\big). \end{aligned}$$

(c) On introduit la fonction :

$$f(z) \,:=\, \frac{[\log z]^2}{(z+a)^2+b^2},$$

avec une puissance de $\log z$ d'une unité supérieure à celle de l'intégrale qui nous intéresse. Ici, la fonction $z \longmapsto \log z$ est supposée définie dans $\mathbb{C}\backslash[0,\infty[$, être holomorphe dans ce domaine, avec $\log(-1) = i\,\pi$. Calculer les résidus de f aux deux points :

$$w_- \,:=\, -\,a - i\,b \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad w_+ \,:=\, -a\,+i\,b.$$

Indication: On a donc $\log r\,e^{i\theta} \,=\, \log r + i\,\theta$ pour tout $z \,=\, r\,e^{i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ avec $r > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. On calculera ces résidus en fonction de ρ, φ_-, φ_+.

(d) Trouver, en fonction de a, b, ρ, la valeur de :

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon,\mathrm{R}}} f(z)\,dz \,=\, \frac{\pi}{b}\bigg(4\pi \arctan\tfrac{b}{a} - 4i\log\rho\,\arctan\tfrac{b}{a}\bigg).$$

(e) On abrège par $\mathrm{A} + i\,\mathrm{B}$ la valeur de cette intégrale. Montrer que :

$$\mathrm{A}+i\,\mathrm{B} \,=\, \int_{C_\mathrm{R}} f(z)\,dz - \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x + 2i\pi\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx - \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

(f) Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ une constante fixée. Montrer rigoureusement que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0\\ >}}\,\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_\varepsilon^\mathrm{R} \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx \,=\, \int_0^\infty \frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2}\,dx.$$

Indication: On pourra utiliser le fait — que l'on justifiera très brièvement — qu'il existe des constantes $0 < \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 < \infty$ telles que :

$$\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2 \,\leqslant\, \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2\,[\log x]^2 \qquad\qquad (\forall\, 0 < x < 1),$$

$$\frac{\big[\log x + \mathrm{K}\big]^2}{(x+a)^2+b^2} \,\leqslant\, \frac{\mathrm{M}_3}{x\,\sqrt{x}} \qquad\qquad (\forall\, 1 < x).$$

(g) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\substack{\varepsilon \to 0\\ >}} \int_{c_\varepsilon} f(z)\,dz.$$

(h) Montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{C_\mathrm{R}} f(z)\,dz.$$

(i) Conclure.

6. Examen 6

Exercice 1. La fonction de Bessel de $1^{\text{ère}}$ espèce et d'indice 0 est définie par :

$$J_0(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}\, z^{2n}.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. Indication: Utiliser la formule de D'Alembert ; ou utiliser la formule de Stirling qui fournit un équivalent de $n!$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(b) Montrer que $w(z) := J_0(z)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$0 \;\equiv\; z^2\, w''(z) + z\, w'(z) + z^2\, w(z).$$

Exercice 2. Soit $C := \{z \in \mathbb{C} \colon \; |z| = 1\}$ le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique.

(a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, l'intégrale :

$$\int_C \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}.$$

Indication: Utiliser la formule du binôme de Newton.

(b) En déduire les valeurs de :

$$I_{2n} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad J_{2n} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\, dt.$$

(c) Trouver les valeurs de :

$$I_{2n+1} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t\, dt \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad J_{2n+1} \;:=\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t\, dt.$$

Exercice 3. [Théorème des trois cercles de Hadamard] Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert *connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui contient un anneau *fermé* :

$$A_{r,\mathrm{R}} \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C} \colon \; r \leqslant |z| \leqslant \mathrm{R}\big\} \;\subset\; \Omega,$$

où $0 < r < \mathrm{R}$ sont deux rayons positifs fixés. Pour $\rho \in [r, \mathrm{R}]$ quelconque, on note :

$$M_f(\rho) \;:=\; \max_{|z|=\rho} \big|f(z)\big|.$$

(a) Après avoir dressé une figure soignée, pour ρ fixé avec $r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ unique tel que :

$$\rho \;=\; r^{\theta}\, \mathrm{R}^{1-\theta},$$

et donner la valeur explicite de θ.

(b) Montrer, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \geqslant 1$ que l'on a :

$$\rho^p\, M_f(\rho)^q \;\leqslant\; \max\big\{r^p\, M_f(r)^q, \;\; \mathrm{R}^p\, M_f(\mathrm{R})^q\big\}.$$

(c) En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\rho^\alpha \, M_f(\rho) \;\leqslant\; \max\big\{r^\alpha \, M_f(r),\;\; \mathrm{R}^\alpha \, M_f(\mathrm{R})\big\}.$$

(d) En déduire que :

$$M_f(\rho) \;\leqslant\; M_f(r)^\theta \, M_f(\mathrm{R})^{1-\theta} \qquad\qquad (\forall\, \rho \text{ avec } r \leqslant \rho \leqslant \mathrm{R}).$$

(e) Interpréter le résultat obtenu en termes de fonctions convexes.

Exercice 4. Pour un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$, l'objectif de cet exercice est de déterminer la limite, quand $\mathbb{R} \longrightarrow \infty$, des intégrales :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;:=\; \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x} \, e^{it\,x} \, dx.$$

(a) On introduit la fonction méromorphe $f_t(z) := \frac{\sin z}{z} \, e^{itz}$. Vérifier que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, puis montrer que $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ est holomorphe *entière*.

(b) Pour $\mathrm{R} > 1$ quelconque, soit le segment $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$. Soit aussi β_{R} la courbe orientée, constituée des trois morceaux : le segment $[-\mathrm{R}, -1]$; le demi-cercle unité *inférieur*, *i.e.* situé *sous* l'axe des abscisses, orienté dans le sens trigonométrique, contenant -1, $-i$, 1 ; le segment $[1, \mathrm{R}]$. Dessiner très soigneusement $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$, $0 \in \mathbb{C}$, β_{R}, $-\mathrm{R}$, -1, $-i$, 1, R.

(c) Montrer l'égalité :

$$\int_{[-\mathrm{R},\mathrm{R}]} f_t(z) \, dz \;=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} f_t(z) \, dz.$$

(d) Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $g_s(z) := \frac{1}{2i} \, \frac{e^{isz}}{z}$. Vérifier que :

$$I_{\mathrm{R}}(t) \;=\; J_{\mathrm{R}}(t+1) - J_{\mathrm{R}}(t-1) \qquad\qquad \text{en posant} \qquad\qquad J_{\mathrm{R}}(s) \;:=\; \int_{\beta_{\mathrm{R}}} g_s(z) \, dz.$$

(e) On introduit les deux courbes :

$\gamma_{\mathrm{R}}^+ \;:=\;$ demi-cercle supérieur centré en 0 de rayon R orienté positivement contenant R, $i\,\mathrm{R}$, $-\,\mathrm{R}$,

$\gamma_{\mathrm{R}}^- \;:=\;$ demi-cercle inférieur centré en 0 de rayon R orienté négativement contenant R, $-i\,\mathrm{R}$, $-\,\mathrm{R}$.

Exécuter très soigneusement une nouvelle figure complète, contenant tous les élément précédents ainsi que γ_{R}^-, $-i\,\mathrm{R}$, γ_{R}^+, $i\,\mathrm{R}$.

(f) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

(g) Calculer $\mathrm{Res}_{g_s}(0)$.

(h) Montrer que :

$$J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \pi - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

(i) Montrer que pour tout $s < 0$, on a :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\,s\,\mathrm{R}\,e^{i\theta}} \, d\theta.$$

Indication: Utiliser un théorème expéditif du cours d'Intégration.

(j) Montrer que :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} J_{\mathrm{R}}(s) \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \; s>0, \\ \pi/2 & \text{pour } \; s=0, \\ 0 & \text{lorsque } \; s<0. \end{cases}$$

(k) En déduire les valeurs recherchées :

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \frac{\sin x}{x}\, e^{itx}\, dx \;=\; \begin{cases} \pi & \text{lorsque } \; |t|<1, \\ \pi/2 & \text{pour } \; t=-1,1, \\ 0 & \text{lorsque } \; |t|>1. \end{cases}$$

(l) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ définie au voisinage de $0\in\mathbb{C}$ telle que $z^2\, f(z)^2 = \sin(z^2)$.

Exercice 5. [Produits de Blaschke finis] L'objectif de cet exercice est de décrire *toutes* les fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0) = \{|z|<1\}$, continues sur sa fermeture $\overline{\mathbb{D}}$, et dont le module prend une valeur *constante* au bord, sur le cercle unité $\partial\mathbb{D} = \{|z|=1\}$.

(a) Plus généralement, soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert connexe borné non vide, et soit $h\in\mathscr{O}(\Omega)\cap\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction holomorphe dans Ω et continue jusqu'au bord $\partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$, dont le module $|h(\zeta)|\equiv a\in\mathbb{R}_+$ est constant pour tout $\zeta\in\partial\Omega$. Quand $a=0$, justifier que $h(z)\equiv 0$ dans $\Omega\cup\partial\Omega$.

(b) On suppose dorénavant que le module $|h(\zeta)|\equiv a\in\mathbb{R}_+^*$ est constant non nul sur le bord pour tout $\zeta\in\partial\Omega$. Quand $h(z)\neq 0$ pour tout $z\in\overline{\Omega}$, montrer que $|h(z)|\equiv a$ est constant partout, pour tout $z\in\overline{\Omega}\cup\Omega$.
Indication: Penser à $\frac{1}{h(z)}$.

(c) Sous l'hypothèse de la Question **(b)**, montrer que $h(z)\equiv\mu\in\mathbb{C}^*$ est alors *constante*, partout dans $\Omega\cup\partial\Omega$.

(d) En supposant que h est *non constante* dans $\overline{\Omega}$, toujours avec $\big|h\big|_{\partial\Omega}$ constant, déduire que h admet alors (au moins) un zéro dans Ω.

(e) Soit donc une fonction $f\in\mathscr{O}(\mathbb{D})\cap\mathscr{C}^0(\overline{\mathbb{D}})$ dont le module est constant sur $\partial\mathbb{D}$. En déduire que f est ou bien constante, ou bien admet une factorisation de la forme :

$$f(z) \;=\; \big(z-\alpha_1\big)^{m_1}\cdots\big(z-\alpha_p\big)^{m_p}\, g(z),$$

où $p\geqslant 1$ est entier, où $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{D}$ sont mutuellement distincts, où $m_1,\dots,m_p\geqslant 1$ sont entiers, et où $g\in\mathscr{O}(\mathbb{D},\mathbb{C}^*)$ est une fonction holomorphe jamais nulle dans $\mathbb{D}$. Indication: Justifier, lorsque f est non constante, qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$. Dresser une figure parlante.

(f) On supppose dorénavant que f n'est pas constante. Soit $\alpha\in\mathbb{D}$, et soit la fonction-type :

$$\phi_\alpha(z) \;:=\; \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

Montrer que $\big|\phi_\alpha(z)\big|\equiv 1$ sur le cercle unité $\{|z|=1\}$.

(g) Soit la fonction :

$$h(z) \;:=\; f(z)\,\prod_{1\leqslant i\leqslant p}\frac{1}{(\phi_{\alpha_i}(z))^{m_i}}.$$

Montrer que h définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ dont le module $|h(z)| \equiv c \in \mathbb{R}_+^*$ est *constant* non nul sur le cercle unité $\partial\mathbb{D}$.

(h) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telle que :

$$f(z) \equiv \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} \left(\frac{z - \alpha_i}{1 - \overline{\alpha}_i z} \right)^{m_i} \qquad (\forall\, z \in \overline{\mathbb{D}}).$$

(i) Trouver toutes les fonctions holomorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ dont le module est constant sur le cercle unité.

Exercice 6. [Théorème de Gauss-Lucas] On rappelle que l'*enveloppe convexe* d'un ensemble fini $E_w := \{w_1, \dots, w_{\mathrm{L}}\}$ de points $w_\ell \in \mathbb{C}$ avec $1 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{L}$ est définie comme :

$$\widehat{E_w} := \Big\{ \lambda_1\, w_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{L}}\, w_{\mathrm{L}} :\ 0 \leqslant \lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{L}} \leqslant 1,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{L}} = 1 \Big\}.$$

Soit un polynôme holomorphe $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ de degré $n \geqslant 1$, donc avec $a_n \neq 0$, et soient $z_1, \dots, z_n$ ses zéros, comptés avec multiplicités.

L'objectif est d'établir que les zéros $w_1, \dots, w_{n-1}$ de son polynôme dérivé $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \cdots + a_1$ sont tous situés dans l'*enveloppe convexe* des zéros $z_1, \dots, z_n$.

(a) Pour un entier quelconque $1 \leqslant j \leqslant n-1$, si $w_j \neq z_1, \dots, z_n$ n'est *pas* l'un des zéros de $P(z)$, établir la formule :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_j - z_i}{|w_j - z_i|^2}.$$

Indication: Décomposer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ en élément simples et obtenir $\frac{1}{z - z_1} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}$.

(b) Ré-écrire cette identité algébrique de manière à conclure. Indication: Trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

7. Examen 7

Exercice 1. Dans $\mathbb{C}$, soient $n \geqslant 1$ points distincts $z_1, z_2, \dots, z_n$ et soit un cercle $C \subset \mathbb{C}$ dont le disque intérieur Δ contient tous ces z_i, pour $i = 1, \dots, n$. Soit le polynôme :

$$p(z) := \big(z - z_1\big)\big(z - z_2\big) \cdots \big(z - z_n\big),$$

et soit une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \Delta \cup C$.

(a) Montrer que :

$$P(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(w)}{p(w)} \frac{p(w) - p(z)}{w - z}\, dw,$$

satisfait $P(z_i) = f(z_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

(b) Montrer que $P(z) \in \mathbb{C}_{n-1}[z]$ est un polynôme de degré $\leqslant n - 1$.

(c) On fixe un rayon $\mathrm{R} > 0$. Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N}(\mathrm{R}) \gg 1$ assez grand pour que, quel que soit $n \geqslant \mathrm{N}(\mathrm{R})$, le polynôme :

$$P_n(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!},$$

n'ait aucun zéro dans le disque fermé $\big\{|z| \leqslant \mathrm{R}\big\}$.

(d) Soit Ω un ouvert connexe borné non vide dans $\mathbb{C}$, et soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0\big(\Omega \cup \partial\Omega\big)$ continue jusqu'au bord de l'ouvert, qui satisfait $|f(\zeta)| = 1$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$. Montrer que, ou bien f possède au moins un zéro $a \in \Omega$, ou bien f est constante.

(e) On suppose maintenant Ω simplement connexe, à bord $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui est un contour de Jordan, toujours avec $|f(\zeta)| = 1$ sur $\partial\Omega$. Ensuite, on suppose que f possède un unique pôle simple $a \in \Omega$. Montrer que toute valeur $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| > 1$ est prise par $f(z)$ avec $z \in \Omega$, une et une seule fois.

Exercice 2. Soit une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ avec $f(0) = 1$, qui est de *type exponentiel minimal*, au sens où :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, C_\varepsilon < \infty \qquad \text{tel que} \qquad \Big(\big|f(z)\big| \leqslant C_\varepsilon\, e^{\varepsilon\,|z|} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}\Big).$$

Soient $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ les zéros de f, supposés en nombre infini (dénombrable), répétés avec multiplicités, ordonnés par modules $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$ croissants.

On suppose de plus que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty.$$

(a) Montrer que le produit infni $\prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ converge absolument sur tout compact $K \subset \mathbb{C}$, vers une fonction holomorphe entière.

(b) Montrer que $z \longmapsto \prod_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ est de type exponentiel minimal. Indication: Utiliser $1 + x \leqslant e^x$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(c) L'objectif est maintenant d'établir que $f(z) \stackrel{?}{=} \prod_{n=1}^{\infty} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)$ s'identifie à ce produit infini, sans aucun facteur supplémentaire, toujours avec $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ de type exponentiel minimal, satisfaisant $f(0) = 1$, et ayant une infnité de zéros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ telle que :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big).$$

(d) Pour $r > 0$ fixé, on découpe :

$$f(z) \,=\, e^{g(z)} \prod_{|a_n| \leqslant 2r} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big) \prod_{2r < |a_n|} \Big(1 - \frac{z}{a_n}\Big).$$

Montrer, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r$, la majoration :

$$\left| \frac{f(z)}{\prod_{|a_n| \leqslant 2r} \big(1 - \frac{z}{a_n}\big)} \right| \leqslant C_\varepsilon \, e^{4\varepsilon r}.$$

Indication: Commencer à raisonner avec $|z| = 4\,r$.

(e) Montrer qu'il existe $r(\varepsilon) \gg 1$ assez grand afin que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = r \geqslant r(\varepsilon)$, on ait :

$$\big| e^{g(z)} \big| \leqslant C_\varepsilon \, e^{5\varepsilon r}.$$

Indication: Utiliser l'inégalité $1 - x \geqslant e^{-2x}$, valable pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

(f) On note :

$$A_g(r) \,:=\, \max_{\theta \in \mathbb{R}} \mathsf{Re}\, g\big(r\, e^{i\theta}\big),$$

et on développe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^n$ en série entière convergente de rayon infini. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$b_n\, r^n \,=\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\mathsf{Re}\, g\big(re^{i\theta}\big) - A_g(r) \Big)\, e^{-in\theta}\, d\theta.$$

(g) Établir que $g(z) \equiv 0$, puis conclure.

(h) Soit maintenant $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec $h(0) = 1$, satisfaisant, pour certaines constantes $0 \leqslant \mathrm{A}, \mathrm{B} < \infty$ convenables :

$$\big| h(z) \big| \leqslant \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\, |z|}.$$

On suppose $h(-z) = h(z)$ paire, de zéros *distincts non nuls* $\pm a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, et on suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} < \infty$. Montrer que :

$$h(z) \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{a_n^2}\Big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

(i) Obtenir l'identité d'Euler :

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} \,=\, \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big) \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Exercice 3. Soit une fonction holomorphe $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ non constante. On suppose que $f(0)$ est réel, avec :

$$0 \,<\, f(0) \,<\, 1.$$

Soit l'application $T \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ définie par :

$$T(w) \,:=\, \frac{w - f(0)}{1 - f(0)\, w} \,=:\, \zeta.$$

(a) Montrer que $\big|T\big(f(z)\big)\big| < |z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(b) Calculer l'inverse $w = T^{-1}(\zeta)$, après avoir justifié que $T \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un biholomorphisme.

(c) On prend $z \in \mathbb{D}$ de la forme $z = r\, e^{i\theta}$ de module $0 \leqslant r < 1$, et on note son image par la composée $T \circ f$:

$$T\big(f(z)\big) \,=:\, \rho\, e^{i\varphi},$$

de module $0 \leqslant \rho < 1$.

On considère le cercle $\big\{|\zeta| = \rho\big\}$, et on introduit :

$$c(\rho) \,:=\, f_0\, \frac{(1-\rho)\,(1+\rho)}{(1 - f_0\rho)\,(1 + f_0\,\rho)},$$

où on a abrégé $f_0 := f(0)$.

Vérifier que $0 < c(\rho) \leqslant f_0$, puis, montrer que :

$$T^{-1}\big(\rho\, e^{i\varphi}\big) - c(\rho) \,=\, \rho\, \frac{(1-f_0)\,(1+f_0)}{(1 - f_0\,\rho)\,(1 + f_0\,\rho)}\, \frac{e^{i\varphi} + f_0\,\rho}{1 + f_0\,\rho\, e^{i\varphi}}.$$

(d) Montrer que $T^{-1}\big(\{|\zeta| = \rho\}\big)$ est un cercle, que l'on déterminera.

(e) Montrer que ce cercle a pour diamètre le segment $\big[T^{-1}(-\rho),\ T^{-1}(\rho)\big]$, et que :

$$-1 \,<\, T^{-1}(-\rho) \,\leqslant\, T^{-1}(\rho) \,<\, 1.$$

(f) Premier cas : on suppose que $0 \leqslant \rho \leqslant f_0$. Montrer que :

$$\frac{f_0 - \rho}{1 - f_0\,\rho} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(g) Deuxième cas : on suppose que $f_0 < \rho < 1$. Montrer que :

$$\big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{\rho + f_0}{1 + f_0\,\rho}.$$

(h) Toujours avec $z = r\, e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ et avec $\big|T\big(f(z)\big)\big| = \rho$, établir l'inégalité :

$$\frac{f_0 - |z|}{1 - f_0\,|z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{f_0 + |z|}{1 + f_0\,|z|}.$$

(i) Sans l'hypothèse $0 < f(0) < 1$, montrer que toute application holomorphe $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ satisfait la paire d'inégalités :

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)| \cdot |z|} \,\leqslant\, \big|f(z)\big| \,\leqslant\, \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)| \cdot |z|} \qquad (\forall\, z \in \mathbb{D}).$$

Exercice 4. L'objectif est de déterminer la valeur exacte de $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ et de $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, avec des techniques d'Analyse Complexe.

(a) Montrer que $\infty = \int_0^\infty \big|\sin x^2\big|\,dx$. Indication: Effectuer le changement de variable $u := x^2$.

(b) Pour $\mathrm{R} > 0$ quelconque, on introduit la courbe fermée simple orientée dans le sens trigonométrique :

$$\Gamma_{\mathrm{R}} \;:=\; \big[0, \mathrm{R}\big] \,\cup\, \mathrm{arc}\,\big(\mathrm{R},\, \mathrm{R}\,e^{i\pi/4}\big) \,\cup\, \big[\mathrm{R}e^{i\pi/4},\, 0\big] \;=:\; \Gamma_{\mathrm{R},1} \,\cup\, \Gamma_{\mathrm{R},2} \,\cup\, \Gamma_{\mathrm{R},3}.$$

Dessiner Γ_{R}, en indiquant l'orientation des 3 morceaux de son bord, ainsi que son intérieur $\Gamma_{\mathrm{R,int}}$.

(c) Que vaut $\int_{\Gamma_{\mathrm{R}}} e^{-z^2}\,dz$?

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{R}\to\infty} \mathrm{R} \int_0^{\pi/2} e^{-\mathrm{R}^2 \sin t}\,dt.$$

Indication: Utiliser la minoration $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}\,t$, valable pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(e) En admettant la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, établir que :

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \;=\; \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

8. Examen 8

Exercice 1. On définit la branche (non principale) de la fonction logarithme par :

$$\log r\, e^{i\theta} \;=\; \log r + i\,\theta,$$

lorsque $r > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Pour $0 < r < 1 < R$, soient γ_r et γ_R les deux demi-cercles fermés de rayons r et R contenus dans le demi-plan supérieur fermé $\big\{\mathrm{Im}\, z \geqslant 0\big\}$, et orientés dans le sens trigonométrique positif.

(a) Élaborer une figure complète et soignée incorporant les éléments suivants :

- $-R$, -1, $-r$, 0, r, 1, R, ainsi que les quatre courbes orientées $[-R,-r]$, γ_r, $[r,R]$, γ_R ;
- i ;
- l'axe de coupure $\big\{i\,y\colon\, y \in \mathbb{R}_-\big\}$.

(b) Montrer que :

$$\int_r^R \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\big(\log|x| + i\pi\big)^2}{x^2+1}\,dx - \int_{\gamma_r} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz \;=\; -\frac{\pi^3}{4}.$$

(c) Montrer que :

$$0 \;=\; \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{(\log z)^2}{z^2+1}\,dz.$$

(e) Établir la formule :

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 2. On pose $E_0(z) := 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on pose :

$$E_p(z) \;:=\; (1-z)\, e^{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}},$$

et on abrège :

$$L_p(z) \;:=\; z + \tfrac{z^2}{2} + \cdots + \tfrac{z^p}{p}.$$

(a) Montrer que :

$$-\,E_p'(z) \;=\; z^p\, e^{L_p(z)} \;=\; \sum_{k\geqslant p} a_k\, z^k,$$

avec des coefficients $a_k \geqslant 0$ tous positifs.

(b) Montrer que :

$$\frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, z^k,$$

définit une fonction holomorphe entière, *i.e.* un élément de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$, avec des coefficients $b_k \geqslant 0$ tous positifs.

(c) Montrer que :

$$|z| \leqslant 1 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leqslant 1.$$

(d) Soit une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, de points $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ pas nécessairement distincts entre eux, avec $|z_n| \longrightarrow \infty$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. On abrège :

$$r_n := |z_n| > 0.$$

Montrer que, pour tout rayon $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \infty.$$

(e) On suppose dorénavant donnée une suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'entiers $p_n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $r \geqslant 0$ fixé, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty.$$

Montrer que le produit infini :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\Big(\frac{z}{z_n}\Big),$$

converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}$, et définit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier.

(f) Maintenant, on suppose que les $z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sont *mutuellement distincts :*

$$z_{n_1} \neq z_{n_2} \qquad\qquad \text{pour} \qquad\qquad n_1 \neq n_2.$$

Montrer qu'il existe une fonction holomorphe entière $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ satisfaisant :

- $\big\{w \in \mathbb{C}:\ g(w) = 0\big\} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$;
- $0 \neq g'(z_m)$ pour tout $m \geqslant 1$.

(g) On pose :

$$f_n(z) := \frac{g(z)}{(z-z_n)\, g'(z)},$$
$$M_n := \max_{|z| \leqslant \frac{1}{2}|z_n|} \big|f_n(z)\big|.$$

Établir l'existence de constantes appropriées $c_n \in \mathbb{C}$ telles que :

$$h(z) := \sum_{n=1}^{\infty} w_n\, f_n(z)\, e^{c_n(z-z_n)},$$

constitue une fonction holomorphe entière $h \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ résolvant le *problème d'interpolation :*

$$h(z_m) = w_m \qquad\qquad (\forall\, m \geqslant 1).$$

Exercice 3. Dans un plan $\mathbb{C} \ni w$, soit la bande B, et dans un plan $\mathbb{C} \ni s$, soit le demi-plan droit, définis par :

$$B := \big\{ w \in \mathbb{C} \colon \ \ -1 < \mathrm{Re}\, w < 1 \big\},$$
$$H := \big\{ s \in \mathbb{C} \colon \ \mathrm{Re}\, s > 0 \big\}.$$

(a) Montrer que l'application :

$$s := \varphi(w) := e^{i\frac{\pi}{2}w},$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} H$.

(b) Soit un disque unité :

$$\Delta := \big\{ \zeta \in \mathbb{C} \colon \ |\zeta| < 1 \big\}.$$

Montrer que l'application :

$$\zeta := \psi(s) := \frac{s-1}{i(s+1)},$$

constitue un biholomorphisme $H \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(c) Montrer que l'application :

$$\zeta := \tan \tfrac{\pi}{4}\, w,$$

constitue un biholomorphisme $B \xrightarrow{\sim} \Delta$.

(d) On se donne maintenant une application holomorphe $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ avec $f(0) = 0$, où $\mathbb{D} := \{|z| < 1\}$ est un disque unité.

Soit $g := \psi \circ \varphi \circ f$. Dresser une figure soignée incorporant les éléments suivants :

- $\mathbb{D}$, $0 \in \mathbb{D}$, un élément $z \in \mathbb{D}$, l'application f ;
- B, $0 \in B$, un élément $w \in B$, l'application φ, les points -1 et 1 ;
- H, $1 \in H$, un élément $s \in H$, l'application ψ ;
- Δ, $0 \in \Delta$, un élément $\zeta \in \Delta$, l'application g.

(e) Montrer que pour tout rayon $0 \leqslant r < 1$, on a :

$$g\big(\{|z| \leqslant r\}\big) \ \subset \ \{|\zeta| \leqslant r\}.$$

(f) Montrer que pour tout rayon $0 < r < 1$, l'image inverse :

$$\psi^{-1}\big(\{|\zeta| = r\}\big) \ = \ C_{\frac{2r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big),$$

est un *cercle* dans le plan des s :

- de centre $\frac{1+r^2}{1-r^2}$;
- de rayon $\frac{2\,r}{1-r^2}$;
- de diamètre le segment $\big[\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}\big]$, contenu dans l'axe réel.

Indication: On pourra poser $s = \sigma + i\,t$.

(g) Vérifier que $\psi^{-1}\big(\{|\zeta| \leqslant r\}\big)$ est le disque $\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$ dans le plan $\mathbb{C}_s$, contenu dans H.

(h) Redessiner la figure de la Question **(d)**, en y ajoutant le cercle $\{|z| = r\}$, avec $f(C_r)$, avec $\varphi\big(f(C_r)\big)$, avec $\psi\big(\varphi\big(f(C_r)\big)\big)$, avec le cercle $C_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, et avec $\big\{|\zeta| = r\big\}$.

(i) Pour tout $s \in \overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\frac{1+r^2}{1-r^2}\big)$, montrer que :

$$\big|\mathsf{Im}\,\varphi^{-1}(s)\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi}\,\mathsf{log}\,\frac{1+r}{1-r}.$$

(j) Montrer que pour tout $|z| < 1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ satisfaisant $f(0) = 0$, on a :

$$\big|\mathsf{Im}\,f(z)\big| \leqslant \tfrac{2}{\pi}\,\mathsf{log}\,\tfrac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Indication: Observer que $\varphi^{-1}(s) = -\,i\,\frac{2}{\pi}\big(\mathsf{log}\,|s| + i\,\mathsf{arg}\,s\big)$, pour $s \in H$ avec $|\mathsf{arg}\,s| < \frac{\pi}{2}$.

(k) Montrer que pour tout $|z| < 1$, toujours avec $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow B$ holomorphe satisfaisant $f(0) = 0$, on a :

$$\big|\mathsf{Re}\,f(z)\big| \leqslant \tfrac{4}{\pi}\,\mathsf{arctan}\,|z|.$$

Indication: En dessinant une figure soignée, on pourra déterminer l'angle minimal $\alpha(r)$ tel que :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\frac{2\,r}{1-r^2}}\big(\tfrac{1+r^2}{1-r^2}\big) \subset \big\{s \in \mathbb{C}\colon\ \mathsf{Re}\,s > 0,\ \ |\mathsf{arg}\,s| \leqslant \alpha(r)\big\}.$$