Analyse Complexe
L3 ENS Paris-Saclay

Polycopié d’exercices

2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions holomorphes, Fonctions analytiques

1.1 Généralités sur les fonctions holomorphes, Conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 1 - Opérations sur les fonctions holomorphes
En utilisant la définition par $\mathbb{C}$-différentiabilité :

1. Démontrer que la somme ou le produit de deux fonctions holomorphes $f, g : U \to \mathbb{C}$, définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, sont encore holomorphes. Déterminer leur dérivée complexe.
2. Même question pour la fonction $(1/f) : z \in U \to (1/f(z)) \in \mathbb{C}^*$, en supposant que la fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}^*$ ne s'annule pas.
3. Même question pour $f \circ g$, en supposant cette fois que g est holomorphe de V (un ouvert) dans U.

Exercice 2
On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que l'application $f : z \in \mathbb{C} \to (1+i)z \in \mathbb{C}$ est une similitude directe. Déterminer le rapport de cette similitude, et l'angle de la rotation sous-jacente.
2. Déterminer la différentielle au point $z_0 = 1$ de l'application $f : \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \bar{z}^2$. L'application f est-elle holomorphe ?
3. Montrer que la composition de deux similitudes directes est une similitude directe. En déduire que si $f : V \to \mathbb{C}$ et $g : U \to V$ sont deux fonctions holomorphes, définies sur les ouverts $U, V \subset \mathbb{C}$, alors $f \circ g : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Exercice 3
Soit U un domaine de $\mathbb{C}$, c'est à dire un ouvert connexe non-vide.

1. Montrer qu'une fonction continue de U dans $\mathbb{C}$ localement constante est constante.
2. Soit f de U dans $\mathbb{C}$, et C^1 vue comme fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont nulles sur U, alors f est constante sur U.

Exercice 4
Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est constante.
2. $\Re(f) = \mathrm{Re}(f)$ est constante.
3. $\Im(f) = \mathrm{Im}(f)$ est constante.
4. $|f|$ est constant.
5. $\bar{f}$ est holomorphe (on dit que f est anti-holomorphe).

Exercice 5
Soit U un domaine et f, g deux fonctions holomorphes sur U.

1. On suppose que pour tout $z \in U$, il existe $c_z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = g(z) + c_z$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in U$ on a $f(z) = g(z) + c$.
2. On suppose que pour tout $z \in U$, il existe $c_z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c_z \cdot g(z)$. En admettant que si g n'est pas identiquement nulle, on a $U \backslash Z(g)$ connexe en notant $Z(g)$ les zéros de g, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in U$ on a $f(z) = c \cdot g(z)$.
3. On note respectivement $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$ la partie réelle et la partie imaginaire de f. Déterminer toutes les fonctions $Q_1 : U \to \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_1 = P + iQ_1 : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

4. On suppose qu'il existe $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Re(f) = F(\Im(f))$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 6
Ecrire les conditions de Cauchy Riemann en polaire. Précisément, en considérant une fonction holomorphe f sur un ouvert U et $\rho : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, calculer :

$$\frac{\partial(f \circ \rho)}{\partial r}; \quad \frac{\partial(f \circ \rho)}{\partial \theta}.$$

Exercice 7
On prend les notations : $z = x + iy, x = \Re(z), y = \Im(z)$.

1. Soit R la fonction polynomiale définie par $R(z) = x + 2ixy$. En quels points $z_0 = x_0 + iy_0$ admet-elle une dérivée complexe ?
2. La fonction polynomiale $P(z) = x + iy^2$ est elle holomorphe ? Et $Q(z) = x^2 + y^2 + ixy$?
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(x, y) = Q(z, \bar{z})$.
4. Montrer qu'une fonction polynomiale f en x et y est holomorphe si et seulement s'il existe un polynôme complexe tel que $f(x, y) = P(z)$ pour tout z.

Exercice 8
On note $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

1. (a) Calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ pour les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ suivantes : $f : (x, y) \to x, f : (x, y) \to e^{x+y} + 2i, f : z \to z, f : z \to \bar{z}, f : z \to z^n (n \in \mathbb{Z})$.
   (b) Soit $f : z \to P(z)$ avec $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que :
   $$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = P'(z), \qquad \frac{\partial P(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = P'(\bar{z}), \qquad \frac{\partial P(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial P(\bar{z})}{\partial z} = 0.$$
   Généraliser à f développable en série entière.
2. (a) Montrer qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$, différentiable sur un ouvert U du plan, est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est identiquement nulle.
   (b) Montrer que, si la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe, on a l'égalité $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$.
3. On dit que f est antiholomorphe quand $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
   (a) Donner des exemples de fonctions antiholomorphes.
   (b) Montrer qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est antiholomorphe si et seulement si la fonction $h : z \in U \to f(\bar{z}) \in \mathbb{C}$ est holomorphe.

Exercice 9 - Fonction harmoniques sur un domaine
On définit le laplacien d'une fonction C^2 sur un domaine U en posant :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit que f est harmonique lorsque $\Delta f = 0$ sur U.

1. On admet ici qu'une fonction holomorphe est C^2. Montrer qu'une fonction holomorphe est harmonique ; idem pour sa partie réelle et imaginaire.
2. Montrer que sur les fonctions $C^2, \Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$. Retrouver la question précédente.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels a, b, c pour que la fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ soit la partie réelle d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
4. Montrer qu'une fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. Indication : on pourra montrer qu'une fonction holomorphe sur un disque admet une primitive holomorphe.

Pour les curieux, ce dernier résultat n'a pas de version globale, on peut le voir avec $u(x + iy) = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right)$ qui donnerait une détermination du $\log$ sur $\mathbb{C}^*$, ce qui n'est pas possible (ce sera montré dans les cours suivants).

1.2 Séries entières

Exercice 10

Pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ associée est défini par l'expression

$$R = \sup\{r \geq 0; |a_n r^n| \text{ est borné }\} \in [0, +\infty]$$

1. (a) Montrer, avec la convention $1/0 = \infty$, l'égalité $1/R = \limsup\left(|a_n|^{1/n}\right)$.

   (b) Si tous les (a_n) sont non nuls à partir d'un certain rang, montrer qu'on a l'inégalité $1/R \leq \limsup\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
2. Peut-on avoir $R = 0$?
3. Rappeler les démonstrations des propriétés fondamentales suivantes :

   (a) Pour $0 \leq r < R$, la série entière converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0,r)}$.

   (b) Si$|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (terme général non borné).
4. Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
5. (a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum z^n$, $\sum n^{-2} z^n$ et $\sum n^{-1} z^n$.

   (b) Etudier la convergence des deux permières séries sur le cercle de convergence.

   (c) Etudier la convergence de la troisième série aux deux points ± 1.

   (d) Bonus. Etudier la convergence de la troisième série sur le cercle de convergence (cette question nécessite de connaître la transformation d'Abel).

Exercice 11

1. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2. Montrer que, lorsque $|z| < \min(R_1, R_2)$, le produit $\left(\sum a_n z^n\right)\left(\sum b_n z^n\right)$ s'écrit comme somme d'une série entière $\sum c_n z^n$, de rayon de de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. Déterminer les coefficients (c_n) en fonction des (a_n) et des (b_n).
2. Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que son rayon de convergence est infini. On note $\exp : z \in \mathbb{C} \to e^z \in \mathbb{C}$ sa somme. Montrer l'égalité $e^{z+w} = e^z e^w$ pour tous $z, w \in \mathbb{C}$.

Exercice 12

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

1. Lemme : Soient f et g deux fonctions entières égales sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'elles sont égales sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que cos et sin sont des fonctions entières 2π-périodiques.
3. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en termes des cos et sin de a et de b.
4. Montrer l'égalité $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Les fonctions cos et sin sont-elles bornées sur $\mathbb{C}$?

Exercice 13

On définit, quand c'est possible, la fonction sinus par $\sin(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} z^{2p+1}$.

1. Les propositions suivantes sont elles vraies ?

   (a) La fonction sinus est bien définie sur $\mathbb{C}$.

   (b) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

   (c) $\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z) = \Im\left(e^{iz}\right)$.

   (d) La fonction sinus est bornée sur $\mathbb{C}$.

   (e) Si $z \in \mathbb{R}$ alors la fonction sinus est la fonction habituelle sur $\mathbb{R}$.

   (f) Il existe une fonction f holomorphe différente du sinus complexe, mais qui coïncide avec le sinus réel quand $z \in \mathbb{R}$.
2. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a t-on $\sin(z) = 0$?
3. Montrer que la fonction f définie par $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$ est holomorphe sur le disque ouvert $D(0,1)$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce en contradiction avec le principe de zéros isolés ?

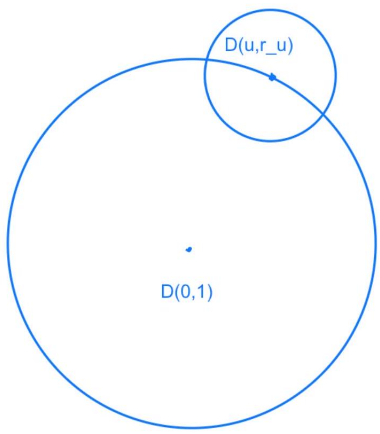
Exercice 14

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec $Q(0) \neq 0$, et la fraction rationnelle $f = P/Q$. Soit l'ensemble des zéros $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$ de Q, que l'on suppose non vide, et $\alpha = \inf\{|z|, z \in Z\}$.

1. Montrer que f est holomorphe sur $U = \mathbb{C}\backslash Z$.
2. Montrer que f est développable en série entière en 0 sur le disque $D(0, \alpha)$.

Exercice 15
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1, et $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ sa somme. On dit qu'un point u sur le cercle de convergence $\mathbb{S}^1 = \{|u| = 1\}$ est un point régulier si il existe une fonction holomorphe $g_u : V_u = D(0,1) \cup D(u, r_u) \to \mathbb{C}$ telle que $g_u = f$ sur $D(0,1)$. Sinon, on dit que u est un point singulier. (Faire un dessin !)

1. On considère ici l'exemple de la série entière $\sum z^n$. Exprimer sa somme f sous forme d'une fraction rationnelle, puis déterminer les points singuliers du cercle de convergence.
2. On veut montrer qu'il existe toujours des points singuliers sur le cercle de convergence. On procède par l'absurde, et on suppose que tout point $u \in \mathbb{S}^1$ est un point régulier.
   (a) Soient $u, v \in \mathbb{S}^1$ et $r_u, r_v > 0$ tels que $D(u, r_u) \cap D(v, r_v) \neq \emptyset$. On veut montrer que $D \cap D(u, r_u) \cap D(v, r_v) \neq \emptyset$ (faire un dessin).
   On pose $t = \frac{r_v}{r_u + r_v}$. Montrer que le point $w = tu + (1-t)v$ appartient à l'intersection $D \cap D(u, r_u) \cap D(v, r_v)$. On commencera par remarquer que $|u - v| < r_u + r_v$.
   (b) En déduire que f se prolonge en une fonction holomorphe définie sur un ouvert V contenant le disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$.
   (c) Montrer que V contient un disque $D(0, R)$ avec $R > 1$.
   (d) Montrer enfin que l'ensemble des points singuliers est un fermé non vide du cercle de convergence.
3. Bonus. Soit la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{(2^n)}$, de rayon de convergence R et de somme f.
   (a) Montrer que $R = 1$ puis que, pour tout entier $n \geq 1$, et tout $z \in D(0,1)$, on a $f\left(z^{(2^k)}\right) = f(z) - \left(z + z^2 + \cdots + z^{2^{(k-1)}}\right)$.
   (b) Montrer que le point $z_0 = 1$ est un point sigulier, puis que toute racine 2^k-ième de l'unité est un point singulier. En déduire que tout point du cercle de convergence est un point singulier.



1.3 Principe des zéros isolés

Exercice 16
Décrire les fonctions analytiques dans le disque $D_1(1) := \{z \in \mathbb{C} || z - 1 | < 1\}$ satisfaisant pour tout entier $n \geqslant 2$:

1. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}$
2. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$
3. $f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = f\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$
4. $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

Exercice 17 1. Discuter l'existence et l'unicité d'une fonction holomorphe $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ vérifiant, pour tout $n \geq 2$, les égalités :

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$,
(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$
(c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{1+n^2}$,
(d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Même question pour une fonction holomorphe $h : D(1,1) \to \mathbb{C}$, avec les égalités :
   (a) $h\left(\frac{1}{n}\right) = 0$,
   (b) $h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 18
Soit f une fonction analytique non identiquement nulle sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit K un compact de $\mathbb{C}$ inclu dans U. On note $K_0 = \{x \in K / f(x) = 0\}$ les points d'annulation de f sur K. Montrer que K_0 est fini.

Exercice 19
Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. On suppose que f, g sont analytiques sur Ω telles que $f(z)g(z) = 0$, pour tout $z \in \Omega$. Montrer que soit $f \equiv 0$ soit $g \equiv 0$ sur Ω. Trouver deux fonctions lisses $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $fg \equiv 0$ mais ni f, ni g est identiquement 0.

Exercice 20
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique ayant la propriété qu'en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, son développement en série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

possède au moins un coefficient nul $f^{n_{z_0}}(z_0) = 0$. Montrer que f est un polynôme.
Indication : Employer un argument de dénombrabilité.

1.4 Logarithmes complexes

Exercice 21 - Logarithme(s) complexe
Soit Ω inclus dans $\mathbb{C}^*$. On appelle logarithme sur Ω une fonction continue sur Ω vérifiant $\exp(f(z)) = id_\Omega$.

1. On appelle $\mathbb{C}^-$ l'ensemble des nombres complexes privé de la droite des réels négatifs ou nuls. On définit la fonction $\log$ sur $\mathbb{C}^-$ par
$$\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$$
où $\arg(z)$ est l'argument de z compris entre $]-\pi, \pi[$. Montrer que $\log(z)$ est un logarithme. On l'appelle détermination principale du logarithme.
2. Montrer qu'il n'existe pas de logarithme sur le cercle unité.
3. Montrer que la différence entre deux logartihmes est égale à $2ki\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer qu'un logarithme sur Ω est holomorphe et de dérivée $\frac{1}{z}$.

Dans de nombreux cas, on utilisera la détermination principale du logarithme, mais il est parfois plus pratique (voir les TDs suivants) de travailler avec une autre détermination : il est important de donner la détermination que vous utilisez quand vous manipulez un logarithme.
Il est également nécessaire de donner une détermination du logarithme quand on traite de puissance de nombre complexe. Par exemple, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\log$ est la détermination principale, on a

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log(z))$$

Exercice 22
1. Rappeler la définition de la détermination principale du logarithme complexe, que l'on notera désormais log, son domaine de définition U et son ensemble image.
2. Déterminer $\log(1+i), \log\left(e^{3i\pi/4}\right)$ et $\log\left(e^{4i\pi/3}\right)$.
3. Soient $z_1, z_2 \in U$ tels que $z_1 z_2 \in U$. Comparer $\log(z_1 z_2)$ et $\log(z_1) + \log(z_2)$.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Proposer une définition de z^α pour $z \in U$. Comparer alors z^{2i}, $\left(z^2\right)^i$ et $\left(z^i\right)^2$ pour $z = e^{3i\pi/4}$.

Exercice 23

1. Rappeler le développement en série entière de la détermination principale du logarithme au voisinage de $z_0 = 1$, et son rayon de convergence.
2. Quel est le domaine de définition U de la fonction holomorphe $h : z \to \log \frac{1+z}{1-z}$? Le dessiner.
3. Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série entière de h à l'origine.
   (a) Déterminer a priori son rayon de convergence.
   (b) Déterminer les (a_n).

1.5 Intégrales curvilignes

Exercice 24 - Longueur d'un chemin
Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien (et donc dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), on sait naturellement définir la longueur d'un segment, et donc d'une ligne polygonale. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ une courbe (application) continue. Pour une subdivision $\sigma = (0 \leq t_0 < \cdots < t_n \leq 1)$ de $[0,1]$, on introduit la longueur $V_\sigma(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$ de la ligne polygonale inscrite dans γ correspondant à cette subdivision. La longueur de γ est alors définie par $L(\gamma) = \sup_\sigma V_\sigma(\gamma) \in [0, \infty]$, le sup étant pris sur toutes les subdivisions de $[0,1]$ (faire un dessin).

On suppose que γ est de classe C^1 et on veut montrer l'égalité $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$.

1. Montrer l'égalité $L(\gamma) \leq \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$.

2. Montrer l'inégalité inverse $L(\gamma) \geq \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$.
   Utiliser l'uniforme continuité de la dérivée γ' sur $[0,1]$, et la convergence des sommes de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(t_i)\|$ vers $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Exercice 25
Soit γ une courbe lisse dans $\mathbb{C}$ paramétrée par $z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$. Soit γ^- la courbe orientée dans le sens inverse. Montrer que pour toute fonction continue f sur γ, on a :

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz$$

Exercice 26 1. Intégrer la fonction $z \to \bar{z} - 1$ sur le bord orienté du triangle T de sommets $(0, 2, 2i)$.

2. Soient $z_0 = -i, z_1 = 2 + i$ et γ le segment de droite reliant z_0 à z_1. Calculer $\int_\gamma z^2 dz$.

Exercice 27
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Intégrer la fonction $f_k : z \mapsto z^k$ sur le cercle unité, parcouru dans le sens trigonométrique. Pour quelles valeurs de k la fonction f_k a-t-elle une primitive sur $\mathbb{C}^*$?

Chapitre 2

Théorèmes de Cauchy et applications

2.1 Lemme de Goursat

Exercice 1 - Lemme de Goursat
Soit f une fonction à valeurs complexes, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si f est dérivable au sens complexe en tout point de Ω, et si $\Delta \subset \Omega$ est un triangle (fermé), alors

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$$

1. On suppose que f est dérivable au sens complexe en $z_0 \in \Omega$, et on pose

   $$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + |z - z_0| \varepsilon(z).$$

   Montrer que pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$ contenant z_0,

   $$\left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| \leq 3 \operatorname{diam}(\Delta)^2 \max_{z \in \Delta} |\varepsilon(z)|$$

2. Soit $\Delta \subset \Omega$ un triangle. Montrer qu'il existe un triangle $\Delta' \subset \Delta$ tel que $\operatorname{diam}(\Delta') \leq \operatorname{diam}(\Delta)/2$, et

   $$\left| \int_{\partial \Delta'} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right|$$

3. En utilisant les deux questions précédentes, démontrer le Lemme de Goursat.
4. Montrer que le résultat reste vrai si l'on suppose seulement que f est localement bornée sur Ω et holomorphe sur $\Omega \backslash \{w\}$ pour un certain point $w \in \Omega$.

Exercice 2 - Cas particulier du théorème de Goursat
Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit une fonction holomorphe f qui est continûment différentiable, i.e. $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues (ce qui n'est pas demandé dans la définition de l'holomorphie). Soit aussi $T = \bar{T} \subset \Omega$ un triangle fermé non aplati. Dans cet exercice nous donnerons une autre preuve du théorème de Goursat

$$0 = \int_{\partial T} f(z) dz$$

avec cette hypothèse supplémentaire. Procéder comme suit :

1. Étudier d'abord ce cas spécial du théorème général de Riemann-Green : Pour une fonction réelle $P \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathrm{R})$,

   $$\int_{\partial G} (P dx) = \int_G \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

   en supposant le domaine G où l'on intègre de la forme "sandwich entre deux graphes" :

   $$G := \left\{ (x, y) \in \mathrm{R}^2 : a \leq x \leq b, f_-(x) < y < f_+(x) \right\}$$

   avec $-\infty < a < b < +\infty$, avec deux fonctions f_-, f_+continues $\mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}$ définies sur $[a, b]$ satisfaisant $f_- < f_+$sur $]a, b[$.

2. Déduire que pour deux fonctions réelles $P, Q \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathrm{R})$ l'intégrale suivante sur le bord du triangle est égale à une intégrale dans l'intérieur :

$$\int_{\partial T} (Pdx + Qdy) = \int_T \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy.$$

Indication : Commencer avec le cas $Q = 0$ et utiliser le résultat de (1). Ensuite, traiter le cas $P = 0$ à l'aide d'un changement de variable.

3. Compléter la preuve du théorème de Goursat avec cette hypothèse supplémentaire que $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$.

2.2 Calculs d'intégrales

Exercice 3
Soit $a > 0$. Pour $R > 0$, soit γ_R le rectangle orienté de sommets $-R, R, R + ia, -R + ia$.

1. Déterminer l'intégrale $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$.
2. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \to \cos(ax)e^{-x^2} \in \mathbb{R}$ est intégrable, et calculer son intégrale.

Exercice 4
Un théorème de Weierstrass énonce qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ peut être uniformément approximée à volonté par des polynômes réels. Montrer que les fonctions continues sur le disque unité $\mathbb{D}$ ne sont pas toutes uniformément approximables par des polynômes holomorphes $P(z) \in \mathbb{C}[z]$.
Indication : Essayer d'approximer $f(z) = \bar{z}$ et calculer $\int_{\partial \mathbb{D}} \bar{z} dz$.

Exercice 5
Soit $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin dans $\mathbb{C}^*$ donné par $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, avec ρ et θ deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I, ρ ne s'annulant pas.

1. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i\pi} \log \left(\frac{\rho(b)}{\rho(a)} \right) + \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$
2. Montrer que si γ est un lacet ($\gamma(a) = \gamma(b)$), alors $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z}$ est un entier. A quoi correspond t-il ?

Exercice 6 - Le Lemme de Jordan
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue définie sur

$$U = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0 \text{ et } |z| > \varepsilon.\}$$

1. Pour $R > \varepsilon$, on introduit le chemin $\gamma_R : t \in [0, \pi] \to Re^{it} \in \mathbb{C}$. Dessiner U et γ_R.
2. On suppose que $\lim_{z \in U, |z| \to \infty} |f(z)| = 0$. Montrer alors que, pour tout réel $a > 0$, on a
$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0$$
On rappelle l'inégalité $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$, que l'on redémontrera, valable pour θ entre 0 et $\pi/2$.

Exercice 7 - Intégrale de Fresnel - V1
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt$ (sous réserve d'existence).

1. Monter qu'il suffit de connaitre la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt$ (sous réserve d'existence).

On définit $A = 0, B = R$ et $C = R(1 + i)$ trois points dans le plan complexe, on note T le triangle orienté (ABC) et ∂T son bord. Soit $f(z) = \exp\left(-z^2\right)$

2. On admet ici que f admet une primitve holomorphe sur $\mathbb{C}$. En déduire la valeur de $I_R = \int_{\partial T} f(z) dz$

3. En considérant des courbes $\mathcal{C}^1$ entre A et B, B et C, C et A, montrer que

$$I_R = A_R + B_R + C_R$$

où A_R, B_R, et C_R sont 3 intégrales complexes.

4. Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-R^2+t^2} dt = 0$$

5. En déduire, en passant à la limite $R \to +\infty$, que $\int_0^{+\infty} e^{-it^2} dt$ existe et sa valeur.
6. Conclure.

Exercice 8 - Intégrales de Fresnel - V2

1. Esquisser le graphe de la fonction $x \in \left[0, \infty\right[\to \sin\left(x^2\right) \in \mathbb{R}$. Est-elle intégrable ? On pourra effectuer le changement de variables $u = x^2$.

   On va cependant montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx$ est semi-convergente, c'est-à-dire que la limite $I_s = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin\left(x^2\right) dx$ existe. Pour chaque $R > 0$, on considère un lacet γ_R d'image le bord orienté du secteur du disque $D(0, R)$, de sommets $\left(0, R, Re^{i\pi/4}\right)$.

2. Dessiner γ_R et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$.
3. En déduire que I_s est bien définie, et la calculer. (On obtient également la valeur de l'intégrale semiconvergente $I_c = \int_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx\big)$.

Exercice 9 - Noyau de Poisson

1. Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\zeta| < 1$. Montrer les identités

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \frac{1-|\zeta|^2}{1-2\,\mathrm{Re}\,\zeta+|\zeta|^2} = \frac{1}{1-\zeta} - \frac{1}{1-1/\bar{\zeta}}$$

2. En déduire, pour $|w| = 1$ et $0 < |z| < 1$, l'identité $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\,\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) + \frac{1}{w-1/\bar{z}}$.
3. Soit $f : U \to \mathbb{C}$, holomorphe sur un ouvert U contenant le disque unité fermé $\{|z| \le 1\}$. Soit $c_1 = \{|z| = 1\}$ parcouru dans le sens trigonométrique. Montrer que, pour $|z| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c_1} f(w)\,\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) \frac{dw}{w}$$

4. En déduire la formule de représentation $u(re^{it}) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} d\theta$ pour la fonction harmonique $u = \mathrm{Re}\, f$ sur le disque unité ouvert.

2.3 Inégalités de Cauchy

Exercice 10

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un ouvert U contenant le disque fermé $\{|z| \le 1\}$. Soit $M = \sup_{|z|=1} |f(z)|$.

1. Soient $0 < r < 1$ et $|z| \le r$. Montrer que $|f(z) - f(0)| \le M \frac{r}{1-r}$.
2. On suppose que $a = |f(0)| \ne 0$. Montrer que $f(z) \ne 0$ si $|z| < \frac{a}{M+a}$.

Exercice 11 - Théorème de Liouville

Soit f une fonction entière.

1. Soient $a \ne b$ deux complexes, et $R > \sup(|a|, |b|)$. Evaluer l'intégrale

$$I(R) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

   où C_R désigne le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique. On utilisera la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $z \to \frac{1}{(z-a)(z-b)}$.

2. On suppose maintenant que f est bornée. Montrer alors que f est constante.

On verra en cours une autre démonstration, également basée sur la formule de Cauchy.

Exercice 12 - Théorème de d'Alembert-Gauss - V1
Soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. On veut montrer que P admet au moins un zéro sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $|P(z)| \geq |z|^n/2$ pour tout complexe z tel que $|z| \geq R$.
2. On suppose, par l'absurde, que P ne s'annule pas et on introduit la fonction entière $f = 1/P$. Déduire de la formule de Cauchy que $f(0) = 0$, puis conclure.

Exercice 13 - Formule de Cauchy sur les dérivées
Soient $f : U \to \mathbb{C}$ avec U un ouvert convexe, et γ un lacet tracé dans U.

1. Rappeler l'énoncé de la formule de Cauchy pour f.
2. En déduire la formule de Cauchy pour ses dérivées, en utilisant le théorème de dérivation sous l'intégrale. Une autre preuve sera donnée en cours.

Exercice 14 - Fonctions à croissance polynomiale
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante $c > 0$ telle que $|f(z)| \leq c|z|^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$. Montrer alors que f est une fonction polynomiale de degré au plus m.

2.4 Principes du maximum

Exercice 15 - Principe du maximum
Soit f une fonction holomorphe d'un ouvert Ω et soit $a \in \Omega$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que le disque fermé $\bar{D}(a, r)$ soit inclus dans Ω.

1. Montrer que
$$f\left(a + re^{i\theta}\right) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) r^n e^{in\theta}$$
puis que
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(a + re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_0^{+\infty} \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\right|^2 r^{2n}$$
2. En déduire le principe du maximum (ou plutôt, l'une des nombreuses versions de ce principe) : Soit Ω un domaine et f une fonction holomorphe sur Ω. Si $|f|$ admet un maximum local, alors f est constante sur Ω.
3. Retrouver le théorème de D'Alembert Gauss à l'aide du principe du maximum.

Exercice 16
Soient f, g et h des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U contenant le disque unité fermé.

1. On suppose que f et g ne s'annulent pas, et que $|f| = |g|$ sur le cercle unité. Montrer qu'il existe un complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $f = \lambda g$.
2. Le résultat ci-dessus persiste-t-il si f et g peuvent s'annuler ?
3. On suppose que $h : U \to \mathbb{C}$ holomorphe ne prend que des valeurs réelles sur le cercle unité. Montrer que h est constante.
   On pourra introduire la fonction $f = e^{ih}$.

Exercice 17
Soient $f_1, f_2 \ldots . f_m$ et g $m+1$ fonctions holomorphes dans un domaine U de $\mathbb{C}$, avec g non identiquement nulle. On supose que $|g| = \sum_{j=1}^m |f_j|$ dans U.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $u_1, u_2 \ldots u_m$ holomorphes dans U telles que $f_j = u_j g$ et $\sum_{j=1}^m |u_j| = 1$
2. Soit $\alpha \in U$. Exhiber des nombres complexes ε_j de module 1 tels que $1 = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j(\alpha)$. En déduire que $1 = \sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j$ dans U

3. Soit $w_1, w_2 \dots .w_m$ des nombres complexes tels que $1 = \sum_{j=1}^m |w_j| = \sum_{j=1}^m w_j$. Montrer que si $w_1 \neq 0$ alors $w_j = \lambda_j w_1$ avec $\lambda_j \geq 0$.
4. En déduire que les fonctions u_j sont constantes dans U. En déduire une relation entre g et f.

Exercice 18 - Lemme de Schwarz
On note D le disque de centre 0 de rayon 1 . Soit f une fonction holomorphe sur D vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour $z \in D$.

1. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour $|z| \in D$ (on pourra considérer la fonction $g(z) = f(z)/z$).
2. Montrer que $|f'(0)| \leq 1$.
3. Montrer que si $|f'(0)| = 1$ ou s'il existe $z \in D$ non nul tel que $|f(z)| = |z|$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour $z \in D$.

Exercice 19
Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in U$. Montrer que, si $\operatorname{Re} f$ ou bien $\operatorname{Im} f$ admet un maximum ou un minimum local en z_0, alors la fonction f est constante. On pourra déduire ces résultats du principe du maximum, ou bien du théorème de l'application ouverte.

Exercice 20 - Théorème des trois droites de Hadamard
Soit $h \in C^0(\overline{\mathbb{B}}) \cap \mathscr{O}(\mathbb{B})$ une fonction continue sur la bande fermée $\overline{\mathbb{B}}$, et holomorphe sur la bande ouverte $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. On suppose que h est bornée sur $\overline{\mathbb{B}}$. Soient $M_0, M_1 > 0$ tels que $|h(z)| \leq M_0$ lorsque $\operatorname{Re} z = 0$ et $|h(z)| \leq M_1$ lorsque $\operatorname{Re} z = 1$.

On veut montrer qu'on a, pour tout $t \in [0, 1]$, la majoration $|h(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t$ lorsque $\operatorname{Re} z = t$.
Soit $\varepsilon > 0$. On introduit la fonction définie pour $z \in \overline{\mathbb{B}}$ par $h_\varepsilon(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} e^{\varepsilon z(z-1)} h(z)$.

1. Vérifier que l'expression définissant h_ε a bien un sens.
2. Montrer que $|h_\varepsilon(z)| \leq 1$ lorsque $z \in \mathbb{B}$ et $|\operatorname{Im} z|$ est grand.
3. En déduire que $|h_\varepsilon| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{B}$.
4. Conclure.

Exercice 21
Soit f une fonction holomorphe sur $D(0, 1)$. On appelle diamètre de f la quantité

$$d = \sup_{w,z \in D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

éventuellement infinie.

1. Démontrer que $2f'(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)-f(-w)}{w^2} dw$, pour $r \in (0, 1)$.
2. En déduire que $2\,|f'(0)| \leq d$.

2.5 Convergence uniforme d'une suite de fonctions holomorphes

Exercice 22
Soient U un ouvert connexe de $\mathcal{C}$ et f une fonction holomorphe sur U telle que la suite $f_n = f^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de U. Que peut-on dire de la limite g de la suite $(f_n)_n$?

Exercice 23
Soit $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes. Soit $\bar{D}(a, r) \subset U$ un disque fermé inclus dans U.

1. On suppose que chaque f_n s'annule au point $a (n \in \mathbb{N})$. Montrer que les fonctions définies pour $z \in U \backslash \{a\}$ par $g_n(z) = \frac{f_n(z)}{z-a}$ se prolongent en des fonctions holomorphes $g_n : U \to \mathbb{C}$.
2. On suppose maintenant de plus que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur U.
   (a) Montrer alors que la suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur U.
   (b) Montrer que la suite (g'_n) converge uniformément sur $\bar{D}(a, r)$, et déterminer sa limite.

Exercice 24
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω qui convergent uniformément sur tous les compacts de Ω vers f (f est donc holomorphe). On suppose que les (f_n) ne s'annulent pas sur Ω et on veut prouver que f ne s'annule pas ou f est identiquement nulle. On suppose f non identiquement nulle et on fixe $a \in \Omega$.

1. Justifier l'existence d'un réel $r>0$ tel que $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur le bord du disque $D(a, r)$.
2. Justifier l'existence de $\varepsilon>0$ tel que, pour tout $z \in \partial D(a, r),|f(z)| \geq \varepsilon$.
3. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $z \in \partial D(a, r),\left|f_n(z)\right| \geq \varepsilon / 2$.
4. En déduire que $\left|f_n(a)\right| \geq \varepsilon / 2$ puis conclure.

Exercice 25 - Théorème de Montel version faible
Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\left(f_n\right)$ une suite de fonctions holomorphes qui convergent simplement sur U vers f. On suppose que $\left(f_n\right)$ est uniformément bornée (ie il existe C telle que $\forall z \in U, \forall n \geq 0,\left|f_n(z)\right| \leq C$).

1. On fixe K un compact de U et $z_0 \in K, r>0$ tel que $D\left(z_0, r\right) \subset U$. Montrer qu'il existe une constante $M>0$ telle que, pour tout $z \in D\left(z_0, r / 2\right)$, on a
$$\left|f_n(z)-f_m(z)\right| \leq M \int_{C\left(z_0, r\right)}\left|f_n(w)-f_m(w)\right| d w$$
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $p=p\left(z_0\right)$ tel que, pour tout $n, m \geq p\left(z_0\right)$, on a
$$\sup _{z \in D\left(z_0, r / 2\right)}\left|f_n(z)-f_m(z)\right| \leq \varepsilon$$
3. Conclure que $\left(f_n\right)$ converge uniformément vers f sur K.

Exercice 26
On considère le produit infini
$$f(z):=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right)$$

1. Montrer que ce produit définit une fonction f holomorphe sur le disque unité D.
2. Montrer que $\forall z \in D, f\left(z^2\right)=f(z) /(1+z)$.
3. En déduire que $\forall z \in D, f(z)=1 /(1-z)$.

Chapitre 3

Homotopies, Séries de Laurent, Fonctions méromorphes

3.1 Homotopie

Exercice 1 - Existence (ou non) de primitives
Soit $f : z \to 1/(z(z-1))$.

1. Déterminer la valeur des intégrales $\int_{\gamma_i} f(z)dz$, où $\gamma_1 = c(2,3)$ et $\gamma_2 = c(2,3/2)$ sont les cercles de centre 2 et de rayons respectifs 3 et $3/2$, parcourus dans le sens trigonométrique.
2. La fonction f admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$?
3. Soit $U = \mathbb{C}\backslash[0,1]$ le plan privé du segment $[0,1] \subset \mathbb{R}$.
   (a) Soit γ un lacet tracé dans U. Montrer l'égalité ind $(\gamma, 0) = \mathrm{ind}(\gamma, 1)$. On pourra étudier l'application $t \in [0,1] \to \mathrm{ind}(\gamma, t) \in \mathbb{Z}$.
   (b) Montrer que la restriction $f_{|U}$ de f à cet ouvert y admet une primitive $F : U \to \mathbb{C}$.
   (c) Expliciter une telle primitive F à l'aide de fonctions usuelles. On vérifiera que l'expression proposée a bien un sens.

Exercice 2
On veut montrer qu'il n'existe pas de fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f \circ f = \exp$. On procède par l'absurde, et on considère une telle fonction.

1. Montrer que $\mathbb{C}^* \subset f(\mathbb{C})$, puis en déduire l'égalité $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.
2. Montrer que f possède un logarithme $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
3. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $(g \circ f)(z) = z + c$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On pourra utiliser la relation fonctionnelle $e^g \circ f = \exp$.
4. En déduire que f serait injective, puis conclure.

Exercice 3
Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe définie sur un ouvert connexe U. On suppose que U contient le disque unité fermé, et que f ne s'annule pas.

1. Montrer qu'il existe deux points distincts z_1 et z_2 sur le cercle unité pour lesquels $|f(0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$.
2. Le résultat persiste-t-il si f peut s'annuler ?

Exercice 4
Soient f, g deux fonctions entières.

1. On suppose que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a l'inégalité stricte $|f| < |g|$. Que dire de f/g ?
2. On suppose f non constante. Montrer que l'image $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ est dense. On procèdera par contradiction, en supposant que le disque $D(a,r)$ ne rencontre pas $f(\mathbb{C})$.

Exercice 5 - Formule de Cauchy pour f de classe C^1
L'objectif de cet exercice est de donner une autre preuve de la formule de Cauchy, pour une fonction holomorphe dont on sait déjà que sa dérivée est continue.

Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que f est de classe C^1, c'est-à-dire que sa dérivée $f' : U \to \mathbb{C}$ est continue.

1. Soit $\Gamma : (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \to \gamma_s(t) \in U$ une application de classe C^2. On suppose que, pour tout s, le chemin $\gamma_s : [0,1] \to U$ est un lacet i.e. que $\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$. Montrer que la fonction $I : s \in [0,1] \to \int_{\gamma_s} f(z)dz$ est constante. On pourra chercher à dériver sous le signe somme.
2. Soit $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ un disque fermé. Déduire du (1) qu'on a pour tout $z \in D(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

   Utiliser (1) pour passer de l'intégrale sur le cercle $C(z_0, r)$ à une intégrale sur un cercle $C(z, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ petit.

Exercice 6
Soit f une fonction holomorphe de U dans U avec U domaine de $\mathbb{C}$. On suppose que f vérifie $f \circ f = f$. Montrer que f est constante ou que f est l'application identité.

Exercice 7
1. On considère la fonction $f(z) = \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$. Donner la nature de la singularité en 1 de la fonction. La fonction est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$? Calculer le développement en série de Laurent de la fonction en puissance de $z-1$ dans $\mathbb{C}/\{1\}$ et vérifier la nature de la singularité en 1.
2. Donner le développement en série de Laurent en 0 de la fonction $g(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Exercice 8
Soit $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe définie sur un ouvert connexe, et ne s'annulant pas.
1. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un lacet. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}$$

   On pourra introduire la fonction $\lambda : t \in [0,1] \to \exp\left(\int_{\gamma([0,t])} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right) \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que f admet un logarithme $g : U \to \mathbb{C}^*$ holomorphe (i.e. $f = \exp \circ g$) si et seulement si on a, pour tout lacet tracé dans U, l'égalité

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

3. Soit $k \geq 2$. On suppose que f admet une racine k-ième holomorphe $h : U \to \mathbb{C}^*$. Montrer qu'on a alors pour tout lacet tracé dans U :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in k\mathbb{Z}$$

4. On suppose que f vérifie la condition précédente pour un entier $k \geq 2$.
   (a) On fixe $\zeta_0 \in U$. Soient $\zeta \in U$ et un chemin $c_\zeta \subset U$ joignant ζ_0 à ζ. Montrer que la quantité $H(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{k} \int_{c_\zeta} \frac{f'}{f}\right)$ ne dépend pas du choix du chemin c_ζ.
   (b) En déduire que f admet une racine k-ième holomorphe $h : U \to \mathbb{C}$.
5. (a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $h : D(0,1) \to \mathbb{C}$ telle qu'on ait l'égalité $\frac{1}{e^z-1} = \frac{h(z)}{z}$ pour tout $0 < |z| < 1$. Que vaut $h(0)$?
   (b) La fonction $f : z \in D^*(0,1) \to e^z - 1 \in \mathbb{C}$ admet-elle un logarithme sur le disque unité pointé $D^*(0,1) = D(0,1) \backslash \{0\}$?
6. Soit $k \geq 2$. A quelle condition sur l'entier relatif $p \in \mathbb{Z}$ la fonction $z \in \mathbb{C}^* \to z^p \in \mathbb{C}$ admet-elle une racine k-ème holomorphe ?

3.2 Séries de Laurent

Exercice 9
Soit la fraction rationnelle $f : z \to 1/((z-1)(z-2))$.

1. Déterminer les développements en série de Laurent de la fonction $z \to 1/(1-z)$ sur le disque unité $D(0,1)$ ainsi que sur l'anneau $A(1,\infty)$.
2. Déterminer les développements en série de Laurent de f sur le disque $D(0,1)$ ainsi que sur chacun des anneaux $D(1,2)$ et $D(2,\infty)$.

Exercice 10
Soit la fraction rationnelle $f : z \to 1/(z(z-1))$.

1. Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction f sur chacun des anneaux $A(0,1)$ et $A(1,\infty)$.
2. Déterminer les résidus res $(f,0)$ et res $(f,1)$.
3. (a) Donner le développement de Laurent de f sur l'anneau $A_1(0,1) = \{0 < |z-1| < 1\}$. On pourra poser $w = z-1$.
   (b) Retrouver la valeur de $\mathrm{res}(f,1)$.

Exercice 11 1. Démontrer que l'expression $z \to e^{1/(2z)} + e^z$ définit une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.
2. Déterminer la nature de la singularité en l'origine.
3. Ecrire le développement de Laurent de f sur $\mathbb{C}^*$, et déterminer son résidu en l'origine.
4. Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{C}$ la fonction $z \in \mathbb{C}^* \to f(z) - c/z$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^*$?

3.3 Fonctions méromorphes

Exercice 12 - Singularités isolées
Pour chacune des expressions suivantes, déterminer l'ouvert maximal sur lequel elle définit une fonction holomorphe. Discuter la nature de chaque singularité. Lorsqu'il s'agit d'un pôle, indiquer son ordre.

1. $z \to \frac{z^4}{(z^4+16)^2}$,
2. $z \to \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$,
3. $z \to \frac{1-\cos z}{\sin z}$,
4. $z \to \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z-2i\pi}$,
5. $z \to \cos(1/z)$,
6. $z \to 1/\cos z$,
7. $z \to \frac{1}{\cos(1/z)}$.

Exercice 13 1. Soient $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $a \in U$ un point de U, et $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que l'expression $z \to \frac{f(z)}{(z-a)^k}$ définit une fonction méromorphe g sur U.
   (b) Exprimer le résidu $\mathrm{Res}(g,a)$ en fonction des dérivées de f au point a.
2. Montrer que chacune des expressions suivantes définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont on déterminera les pôles. On précisera l'ordre et le résidu pour chaque pôle :
   (a) $z \mapsto \frac{z}{z^2+1}$
   (b) $z \mapsto \frac{z^2+z+2}{(z-2)(z-1)^2}$
   (c) $z \mapsto \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$
   (d) $z \mapsto 1/\sin z$
   (e) $z \mapsto \frac{\sinh z}{z^4}$
   (f) $z \mapsto \frac{e^z \sinh z}{z^4}$.

Chapitre 4

Théorème des résidus et applications

4.1 Méthodes de calcul d'intégrales et résidus

Exercice 1 - Calculs pratiques de résidus
Démontrer les formules de cours suivantes :

1. Si $v_a(f) \geq -1$, alors
$$\operatorname{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$
2. Si a est un pole d'odre k de f alors
$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{1}{(k-1)!} \tilde{f}^{(k-1)}(a), \quad \tilde{f}(z) := (z-a)^k f(z)$$
3. Si $v_a(f) \geq 0$ et $v_a(g) = 1$ alors
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; a\right) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$
4. La fonction f'/f est méromorphe. Ses pôles sont simples (ce sont les zéros et les pôles de f) et on a
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = v_a(f).$$

Exercice 2
Calculer, quand c'est possible, les résidus suivants :

1. $\operatorname{Res}(f; (1+i))$, où f est entière.
2. Res (g, z), où $g : w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$.
3. Les résidus aux pôles de
$$f(z) := \frac{z^2 + z + 1}{z\left(z^2+1\right)^2}$$
4. $\operatorname{Res}\left(e^{1/z}; 0\right)$.

Exercice 3
Soit $R > 0$ avec R différent de $1/2$ et de 2 . On note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens direct. Calculer, selon les valeurs de R l'intégrale
$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2}.$$

Exercice 4
Soit, pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ le lacet $c(a, r) : t \in [0, 2\pi] \to a + re^{it} \in \mathbb{C}$.

1. Dessiner les lacets sur lesquels intégrer, puis calculer les intégrales :
$$\int_{c(0,1)} \frac{\cos z}{z} dz, \int_{c(2+i,2)} \frac{e^{z^2}}{z-2} dz, \int_{c(3+i,1)} \frac{e^{z^2}}{z-2} dz, \int_R \frac{\cos z}{z\left(z^2+8\right)} dz$$
où R désigne le bord orienté du rectangle de sommets $[1+i, -1+i, -1-i, 1-i]$.
2. Même question pour :
$$\int_{c(0,1)} \frac{e^z}{z^3} dz, \int_{c(1,5/2)} \frac{1}{(z-4)(z+1)^4} dz, \int_{c(i,3/2)} \frac{1}{\left(z^2+4\right)^2} dz, \int_{c(0,3)} \frac{z}{z^2+4} dz.$$

3. Soient $\gamma_1 : t \in [0, \pi] \to 2e^{it} \in \mathbb{C}, \gamma_2 : t \in [\pi, 2\pi] \to 2e^{it} \in \mathbb{C}$ et $\sigma : t \in [-2, 2] \to t \in \mathbb{C}$. Dessiner ces trois chemins, puis estimer les intégrales $\int_{\gamma_1 * \sigma} \frac{z}{z^2+1} dz$ et $\int_{\gamma_2 * \sigma^\vee} \frac{z}{z^2+1} dz$. En déduire

$$\int_{c(0,2)} \frac{z}{z^2+1} dz$$

Exercice 5
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ deux polynômes tels que $\deg Q \geq \deg P + 2$.

1. Soient $a_1, \cdots, a_q$ les zéros de Q. Exprimer, en fonction des résidus de la fraction rationnelle P/Q en ces points la valeur de $\int_{c_r} (P/Q)(z) dz$ pour tout rayon $r > \sup |a_j|$.
2. Montrer alors que $\sum_{j=1}^{q} \operatorname{res}(P/Q, a_j) = 0$.

Exercice 6
On veut calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^6} dt$.

1. Soit la fraction rationnelle $f : z \to \frac{1}{1+z^6}$. Déterminer ses pôles, leur ordre, ainsi que les résidus correspondants. (On remarquera que $\alpha^5 = -1/\alpha$ lorsque α est un pôle de f).
2. Soit, pour $r > 1$, le lacet $\gamma_r : t \in [0, \pi] \to re^{it}$. Montrer que $\int_{\gamma_r} f(z) dz \to 0$ lorsque $r \to \infty$. En déduire la valeur de I.

Exercice 7 - Fractions trigonométriques
Soit $R = P/Q \in R(X, Y)$ une fraction rationnelle telle que $Q(x, y) \neq 0$ si $x^2 + y^2 = 1$. On considère alors

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

1. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \int_{\partial D(0,1)} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$
2. Soit $a > 1$, calculer
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{a + \cos\theta}$$

Exercice 8
Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \log(z) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) dz$$

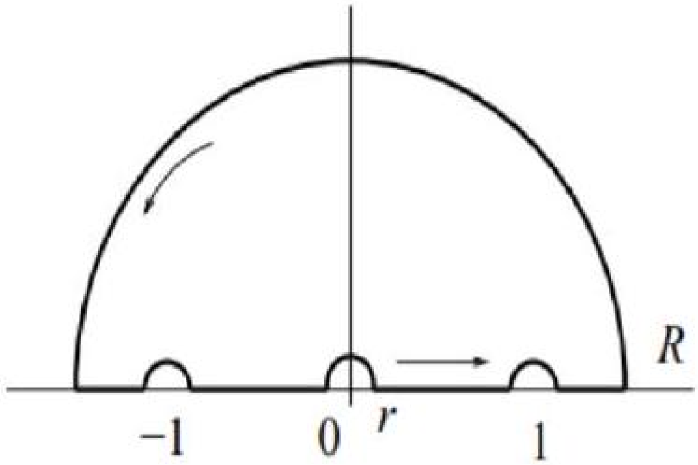
où $\log$ désigne la détermination principale du logarithme, et où $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le lacet défini par $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$. Donner le résultat sous la forme d'une série convergente.

Exercice 9 - Lemmes du petit et du grand cercles

1. (Lemme du petit cercle) Soient $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ tels que $\alpha \leq \beta$, et pour tout $r > 0$, soit $\gamma_r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = a + re^{it}$. Soit $R > 0$ et soit $f : D(a; R) \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe en a, et telle que $v_a(f) \geq -1$. Montrer que
$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = (\beta - \alpha) i \operatorname{Res}(f; a)$$
2. (Lemme du grand cercle) Soit $R_0 > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $\gamma_R([\alpha, \beta]) \subset \Omega$ pour tout $R > R_0$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On pose
$$M(R) := \sup\{|f(z)| : z \in \gamma_R([\alpha, \beta])\}$$
et on suppose que $M(R) = o\left(\frac{1}{R}\right)$ lorsque $R \to \infty$. Montrer qu'alors,
$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

3. Soit $\alpha \in]-1,1[$. Calculer l'intégrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln(t)}{t^2-1} dt$$

Indice : intégrer une fonction holomorphe bien choisie sur le contour représenté sur la figure ci-dessous.



Exercice 10 - Intégrale de Dirichlet - V1
On veut calculer l'intégrale semi-convergente $J = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{\sin t}{t} dt$.

Pour $0 < \varepsilon < r$, on introduit le lacet $\gamma = c_1 * c_2 * c_3 * c_4$ concaténé des chemins c_1 d'image $[\varepsilon, r]$, c_2 d'image le demi-cercle de rayon r dans le demi-plan supérieur, c_3 d'image $[-r, -\varepsilon]$ et c_4 d'image le demi-cercle de rayon ε dans le demi-plan supérieur, parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique.

1. Démontrer que l'expression $f : z \to e^{iz}/z$ définit une fonction méromorphe dont on déterminera les pôles. Dessiner le lacet γ.
2. Evaluer $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{c_4} f(z)dz$.
3. Montrer que $\lim_{r\to+\infty} \int_{c_2} f(z)dz = 0$.
4. Déterminer la valeur de J.

Exercice 11 - Intégrale de Dirichlet - V2
On rappelle que l'intégrale de Dirichlet est définie par
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

1. Montrer que cette intégrale est semi-convergente mais que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer l'intégrale à l'aide du théorème des résidus (on pourra considérer la fonction $g : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ et deux demi cercles de rayon R et r, l'un dans le demi-plan supérieur, l'autre dans le demi-plan inférieur).

Exercice 12 - Indice
Soient $r : [0,1] \to]0,\infty[$ et $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On introduit le chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ défini par $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$.

1. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.
2. Interpréter ce résultat lorsque γ est un lacet.
3. En déduire $\int_c \frac{dz}{z}$, où c désigne le cercle $\{|z-1| = 3\}$ parcouru dans le sens trigonométrique.
4. Raisonner géométriquement pour intuiter la valeur de $\int_{c_2} \frac{dz}{z-i}$, où c_2 désigne le cercle $\{|z| = 2\}$ parcouru dans le sens trigonométrique.
5. Déterminer alors $\int_{c_2} \frac{dz}{z^2+1}$.

Exercice 13 - Transformée de Laplace
Soit f une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout complexe z tel que $\mathrm{Re}(z)>0$, on pose

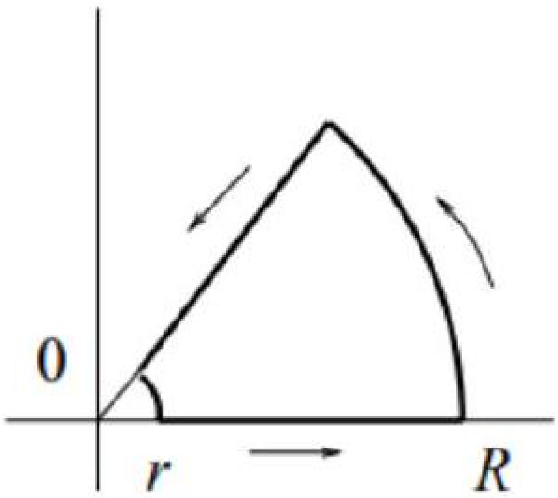
$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)dt$$

1. Montrer que $\mathcal{L}f$ est bien définie et holomorphe sur $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
2. Soit
$$\Lambda(f) := \left\{ s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty} e^{-st}|f(t)|dt < +\infty \right\}$$
$\sigma = \sigma(f) := \inf \Lambda(f)$, et soit $\Omega_\sigma := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma\}$. Montrer que $\mathcal{L}f$ admet un unique prolongement holomorphe sur Ω_σ, et déterminer ses dérivées à tout ordre.

Exercice 14
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $\alpha \in \mathbb{R}$ un réels tels que $n \geq 2$ et $-1 < \alpha < n-1$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^n} dt$$

Indice : intégrer une fonction holomorphe bien choisie sur le contour représenté sur la figure ci-dessous. L'angle d'ouverture est $2\pi/n$.



4.2 Résultats théoriques

Exercice 15 - Théorème de Hurwitz
Soit U un ouvert connexe et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U, qui converge vers f uniformément sur tout compact de U. On suppose que f admet un zéro de multiplicité m en z_0.
Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $0 < r < r_0$, il existe $N(r)$ tel que pour tout $n > N(r)$, f_n a exactement m zéros dans $D(z_0, r)$ comptés avec multiplicité.

Exercice 16 - Théorème de Rouché
1. Soit U un ouvert contenant le disque $\bar{D}(0,r)$, et f et g deux fonctions holomorphes sur U, telles que $|f-g| < |g|$ sur le cercle $C(0,r)$. Montrer que f et g ont le même nombre de zéros dans $D(0,r)$.
2. Montrer que toutes les racines du polynôme $P(z) = z^5 + 3z^3 + 7$ appartiennent au disque $D(0,2)$.
3. Déduire le théorème de d'Alembert du théorème de Rouché.
4. Montrer que la fonction $f : z \to z^{20} + 14z^3 + z - 2$ possède 17 zéros dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

Exercice 17 - Théorème d'approximation de Muntz
Le but de l'exercice est de montrer le résultat de densité dans les fonctions continues sur $[0, 1]$ suivant :
Théorème. Soit $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers positifs distincts, tendant vers $+\infty$. Alors, le sous espace vectoriel engendré par la famille $\left\{1, t^{\lambda_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ est dense dans $C([0, 1])$ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$$

On pourra utiliser la conséquence du théorème de Hahn Banach suivante :
Théorème. Un point z d'un evn X appartient au sev engendré par $Y = \{y_j\}$ famille de X ssi pour toute forme linéaire bornée l qui s'annule sur la famille, l s'annule aussi en z, i.e.

$$\forall y_j \quad l\left(y_j\right) = 0 \Rightarrow l(z) = 0$$

1. (a) Supposons d'abord $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$. Montrer que si l est une forme linéaire continue bornée sur $C([0, 1])$ alors $f(z) = l\left(t^z\right)$ est une fonction holomorphe bornée sur $\{\Re(z) > 0\}$.
   (b) On définit $B_N(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{z-\lambda_j}{z+\lambda_j}$ et $g_N(z) = \frac{f(z)}{B_N(z)}$. Montrer que g est bien définie, holomorphe et bornée sur $\{\Re(z) > 0\}$.
   (c) Conclure sur la première implication.
2. (a) Réciproquement, si $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j} < +\infty$, on pose $f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_i \frac{\lambda_i - z}{2+\lambda_i+z}$.
   Montrer que f est définie et holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\} \geq -2$, puis établir, pour $\{\Re(z) > -1\}$,

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z} ds$$

   (b) En remarquant que $\frac{1}{w} = \int_0^1 t^{w-1} dt$ si $\{\Re(w) > 0\}$, trouver une forme linéaire continue bornée sur $C([0, 1])$ non identiquement nulle telle que $l\left(t^{\lambda_j}\right) = 0$ et conclure.

Chapitre 5

Théorème de l'application conforme de Riemann

5.1 Automorphismes

Exercice 1 - Biholomorphie
Soit Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. On dit que Ω_1 et Ω_2 sont biholomorphes si il existe une bijection holomorphe entre Ω_1 et Ω_2 dont la réciproque est aussi holomorphe.

1. Montrer que $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes (on pourra considérer les applications $z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$ et $z \mapsto \frac{z}{1-|z|}$).
2. $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont-ils biholomorphes ?

Exercice 2 - Automorphismes du disque
On appelle automorphismes de D (noté $Aut(D)$) les applications biholomorphes de D dans D. Si a appartient à D, on définit $\varphi_a : D \mapsto \mathbb{C}$ par

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1+\bar{a}z}$$

1. Montrer que φ_a est un automorphisme de D d'inverse φ_{-a}.
2. Montrer que les automorphismes de D s'écrivent $\lambda\varphi_a$ avec $a \in D$ et $|\lambda| = 1$.

Exercice 3 - Automorphismes du disque épointé

1. Soient $a \in D(0,1)$, l'ouvert $V_a = D(0,1)\backslash\{a\}$ et $f : V_a \to V_a$ un automorphisme.
   (a) Montrer que f admet une singularité effaçable au point a.
   (b) Quels sont les points $b \in \mathbb{C}$ pour lesquels $V_a \cup \{b\} \subset \mathbb{C}$ est ouvert ?
   (c) Montrer alors que le prolongement holomorphe $\tilde{f} : D(0,1) \to \mathbb{C}$ de f vérifie $\tilde{f}(a) = a$.
   (d) Montrer que les automorphismes de V_a sont les restrictions à V_a des automorphismes h de $D(0,1)$ tels que $h(a) = a$.
2. En déduire que les automorphismes de $D^*(0,1)$ sont toutes les applications $z \to \lambda z$ où λ est un complexe tel que $|\lambda| = 1$.

Exercice 4 - Automorphismes de $\mathbb{C}^*$
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ un automorphisme.

1. On suppose dans cette question que l'origine est une singularité effaçable de f. Décrire f.
2. On suppose désormais que 0 n'est pas une singularité effaçable de f.
   (a) Montrer que 0 est un pôle d'ordre 1 de f.
   (b) Montrer que $g : z \in \mathbb{C}^* \to 1/f(z) \in \mathbb{C}^*$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^*$.
3. Montrer que les automorphismes de $\mathbb{C}^*$ sont toutes les applications $z \to \lambda z$ et $z \to \lambda/z$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

5.2 Fonctions holomorphes sur le disque

Exercice 5 - Fonction holomorphe du disque dans lui-même
Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application holomorphe, où $\mathbb{D}$ est le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f s'annule à l'ordre m à l'origine.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ telle que $f(z) = z^m g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

   (b) En déduire que $|f(z)| \leq |z|^m$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, puis que $|f^m(0)| \leq m\,!$
   (c) Décrire f lorsqu'il existe un point $z_0 \in \mathbb{D}^*$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|^m$, ou bien lorsque $|f^m(0)| = m\,!$
2. On suppose ici que f possède m zéros $a_1, \cdots, a_m$ dans $\mathbb{D}$, de multiplicités $k_1, \cdots, k_m$.
   (a) On rappelle que, pour $a \in \mathbb{D}$, $h_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ désigne l'involution du disque telle que $h_a(a) = 0$. Montrer que $|h_a(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$.
   (b) Montrer que la fonction $g : z \to f(z) \prod_{j=1}^m \left(h_{a_j}(z)\right)^{-k_j}$ se prolonge en une application holomorphe $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.
   (c) Majorer $|g|$ sur un cercle $C(0,r) \subset \mathbb{D}$, puis montrer que g prend ses valeurs dans le disque fermé.
   (d) Montrer alors l'inégalité $|f(0)| \leq \prod_{j=1}^m |a_j|^{k_j}$.
3. Bonus : Le lemme de Schwarz-Pick. Montrer, pour tout $a, z \in \mathbb{D}$ avec $a \neq z$, les majorations

$$\left|\frac{f(a) - f(z)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\right| \quad \text{et} \quad |f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

   On pourra introduire le point $b = f(a) \in \mathbb{D}$, et se ramener au cas où $a = b = 0$ en utilisant deux automorphismes du disque $h_\alpha, h_\beta \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$.

Exercice 6 - Applications propres sur le disque
Soit $\mathbb{D} = D(0,1)$. On dit qu'une fonction holomorphe $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est propre lorsque l'image réciproque $f^{-1}(K) \subset \mathbb{D}$ de tout compact $K \subset \mathbb{D}$ est un compact de $\mathbb{D}$. On veut décrire ces applications.

1. Montrer que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est propre si et seulement si $|f(z)| \to 1$ lorsque $|z| \to 1$.
2. Montrer qu'un automorphisme du disque $h_{a,\lambda} \in \operatorname{Aut} \mathbb{D}$ est propre. Montrer également qu'un produit fini $z \in \mathbb{D} \to \prod_{i=1}^p h_{a_i,\lambda_i}(z) \in \mathbb{D}$ est également propre.
3. On se donne désormais $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ propre.
   (a) Montrer que f a un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$.
   (b) En déduire qu'il existe un nombre fini d'automorphismes du disques tels que la fonction $h : z \in \mathbb{D} \to f(z) / \left(\prod_{j=1}^p h_{a_j,\lambda_j}(z)\right) \in \overline{\mathbb{D}}$ soit propre, et ne s'annule pas sur le disque.
   (c) Montrer alors que h est constante. On pourra penser au principe du maximum.

5.3 Suites de fonctions

Exercice 7 - Théorème de Montel
Enoncer et rappeler la démonstration du théorème de Montel.

Exercice 8 - Montel et zéros
Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert. On note, pour $a \in \mathbb{D}$

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

1. Montrer que $\varphi_a(\partial\mathbb{D})$ est inclus dans $\partial\mathbb{D}$
2. On note $H^\infty = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$. Soit $f \in H^\infty, M = \|f\|_\infty$, telle que $f(0) \neq 0$. On note (z_j) la suite des zéros de f, comptés avec multiplicité. Montrer qu'on peut écrire $f = \left(\prod_{j=1}^n \varphi_{z_j}\right) g_n$ avec $\|g_n\|_\infty \leq M$. En déduire que $\prod_{j=1}^n |z_j| \geq |f(0)|/M$
3. Soit $f \in H^\infty$, non identiquement nulle. Montrer que

$$\sum_{j=1}^\infty (1 - |z_j|) < \infty$$

4. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que $\forall z \in \mathbb{D}, |f_n(z)| \leq 1$. On se donne une suite de points (z_j) telle que $\sum_{j=1}^\infty (1 - |z_j|) = \infty$. On suppose que pour tout j, $f_n(z_j) \to 0$. Montrer que f_n tend vers 0 uniformément sur tout compact.

Exercice 9 - Cartan
Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}, a \in \Omega, f$ holomorphe sur Ω, à valeur dans Ω, telle que $f(a) = a$. On note f^n la composée $f \circ f \circ ... \circ f$ n fois.

1. Montrer que $|f'(a)| \leq 1$
2. On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer que f^n converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante égale à a.
3. Le résultat est t-il toujours vrai si Ω n'est plus borné ?

Exercice 10 - Osgood
U un ouvert de $\mathbb{C}, (f_n)$ suite de fonction holomorphe de U qui converge simplement vers une fonction f. On note Ω la réunion de tous les ouverts de U sur lesquels f est holomorphe.

1. Montrer que Ω est ouvert
2. Soit D un disque fermé inclus dans U. Montrer à l'aide du lemme de Baire qu'il existe un disque ouvert $\tilde{D}$ dans D tel que f_n soit unformément borné dans $\mathcal{O}(\tilde{D})$
3. Conclure

Exercice 11 - Théorème de dAlembert-Gauss
Soit $P : z \in \mathbb{C} \to \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante ($a_n \neq 0$ et $n \geq 1$).

1. Montrer que $|P(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$.
2. En déduire que, lorsque $K \subset \mathbb{C}$ est compact, son image réciproque $P^{-1}(K) \subset \mathbb{C}$ est également compacte. On dit que P est une application propre.
3. Montrer alors que l'image $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ est fermée.
4. En déduire que P admet au moins une racine complexe.

Chapitre 6

Transformée de Fourier et fonctions holomorphes

Exercice 1 - Critère de Shannon

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwarz) telle que $\widehat{f}$ est à support dans $[-F, F]$, $F \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $2F < 1$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \operatorname{sinc}(\pi(x-k))$$

2. Rappeler le critère de Shannon et justifier le nom de l'exercice.

Exercice 2 - Densité des polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'esapce des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ (par rapport à Lebesgue), c'est à dire muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x) dx$$

$L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

Soit ρ une fonction poids. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x) dx < +\infty$$

On cherche à montrer que $(\mathrm{Vect}\,\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\})^\perp = \{0\}$

1. Soit $f \in L^2(I, \rho)$. On définit ϕ par

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x), & x \in I \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

2. On pose pour $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_I f(x) e^{-i\omega x} \rho(x) dx$$

Montrer que $\widehat{\phi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur

$$B_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}, |\Im(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

3. Calculer $F^{(n)}(0)$. En déduire que si $f \in Vect\,(x^n)^\perp$ alors $f = 0$ (On pourra utiliser le fait que la transformée de Fourier est injective).

Exercice 3 - Application de Paley-Wiener
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction lisse à support compact non nulle. Montrer que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ n'est pas à support compact.

Exercice 4 - Paley-Wiener pour $C(\mathbb{T})$
Pour $\delta > 0$, on note $B_\delta = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < \delta\}$. Soit $f \in C(\mathbb{T})$.
On va voir que f admet un prolongement analytique à une bande B_δ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $c_n(f) = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon|n|}\right)$.

1. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| \leq M e^{-\varepsilon|n|}$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.
   (b) Montrer que $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inz}$ converge uniformément sur tout compact de B_ε.
   (c) En déduire que f admet un prolongement analytique à B_ε.
2. Supposons que f admet un prolongement analytique à B_δ. Notons

$$M = \sup\left\{|F(u+iv)|; |u| \leq \pi + \frac{\delta}{2}, |v| \leq \frac{\delta}{2}\right\}$$

   (a) Avec la formule de Cauchy, montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{T}} \left|f^{(p)}(x)\right| \leq Mp! \left(\frac{2}{\delta}\right)^p$.
   (b) En déduire que pour tout $n \neq 0$,

$$|c_n(f)| \leq \frac{Mp!}{n^p}\left(\frac{2}{\delta}\right)^p \leq M \exp\left(p \log\left(\frac{2p}{\delta|n|}\right)\right)$$

   (c) En choisissant judicieusement p, en déduire que $|c_n(f)| = \mathcal{O}\left(e^{-\varepsilon|n|}\right)$ pour $\varepsilon = \frac{\delta}{2e}$.

Exercice 5 - Espaces de Hardy du disque unité
Soit $\mathbb{D}$ le disque unité et p un réel strictement positif. On définit l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ comme l'espace des fonctions holomorphes $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt < +\infty$$

On pose $\|f\| := \left(\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^p dt < +\infty\right)^{1/p}$. Montrer que $H(\mathbb{D})$ est un espace de Banach pour cette norme.

Exercice 6
On se place désormais sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

1. Définir a priori un produit scalaire sur cet ensemble.
2. Rappeler pourquoi on peut écrire que pour tout $z \in \mathbb{D} f(z) = \sum_n a_n z^n$.
3. On pose $M(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right|^2 dt\right)^{1/2}$. Exprimer $M(r)$ en fonction des a_n. En déduire que $M(r)$ est croissante.
4. En déduire que $\|f\| = \lim\limits_{r\to 1} M(r) = \left(\sum_n |a_n|^2\right)^{1/2}$.
5. Montrer que $H^2(\mathbb{D})$ est en bijection avec l^2 ($\mathbb{N}$ et en déduire que $H^2(\mathbb{D})$ définit bien un espace de Hilbert.
6. Montrer que pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, l'application de $H^2(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{C}$ qui envoie f sur $f(z)$ est continue.
8. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe $K_z \in H^2(\mathbb{D})$ telle que $\forall f \in H^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \langle f | K_z\rangle$. Donner une expression de K_z.

Exercice 7

Soient $f \in L^2(\mathbb{R}), a > 0$, et $B_a = \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| < a\}$. On va voir que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) La fonction f se prolonge en une fonction F holomorphe sur B_a et telle que

$$\sup_{|y|<a} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty$$

(b) La fonction $\xi \mapsto e^{a|\xi|} \hat{f}(\xi)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.

1. Supposons (b). Montrer que
$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi z} d\xi$$
est un prolongement holomorphe de f sur B_a qui convient.
2. Supposons (a). On se donne $\lambda > 0$ et on définit
$$k_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{\frac{\lambda x}{2}} \right)^2$$
On définit pour $x \in \mathbb{R}$ et $|y| < a$, $f_y(x) = F(x+iy)$ et $g_{\lambda,y}(x) = G_\lambda(x+iy)$ où
$$G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} F(z-u) k_\lambda(u) du$$
   (a) Montrer que $\widehat{g_{\lambda,y}} = \widehat{k_\lambda} \widehat{f_y}$.
   (b) Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g_{\lambda,y}}(\xi) = \widehat{g_{\lambda,0}}(\xi) e^{-\xi y}$.
   (c) En déduire que pour $|\xi| < \lambda$, $\widehat{f_y}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi y}$.
   (d) Conclure en utilisant la formule de Plancherel.

Chapitre 7

Fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann

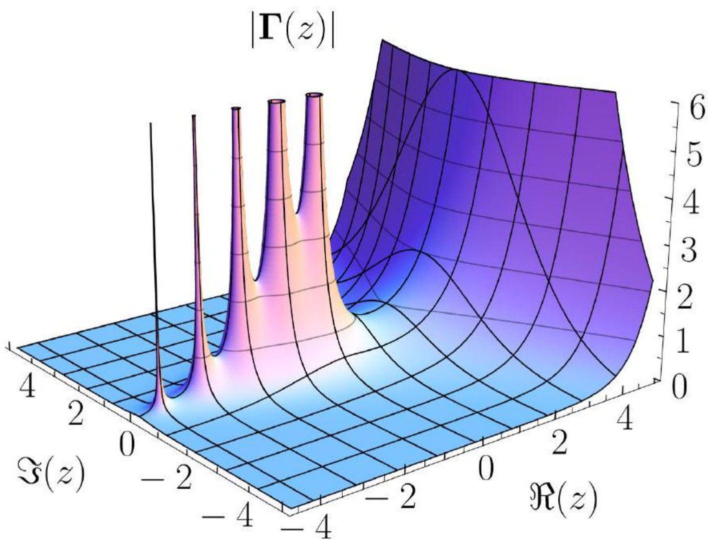
7.1 Fonction Γ d'Euler

Exercice 1 - Fonction Γ - V1
On définit la fonction Γ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que Γ définit une fonction holomorphe sur Ω_0 un ensemble ouvert à préciser.
2. Montrer que $\forall z \in \Omega_0$ on a l'égalité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
3. En déduire que Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}/\{-\mathbb{N}\}$.
4. Donner la nature des singularités aux points $-\mathbb{N}$ de Γ (essentielle, pôle, illusoire). Dans le cas des pôles, on donnera l'ordre leur ordre. La fonction Γ est-elle méromorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 2 - Fonction Γ - V2
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'ouvert $U_n = \{\mathrm{Re}\, z > -n\}$.

1. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $t > 0$. Donner un sens à l'expression t^z.
2. (a) Soit $z \in U_0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$ est absolument convergente. Elle définit donc une fonction $\Gamma : z \in U_0 \to \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \in \mathbb{C}$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'expression $\gamma_k : z \in U_0 \to \int_{1/k}^{k} e^{-t}t^{z-1}dt \in \mathbb{C}$ définit une fonction holomorphe sur U_0.
   (c) Montrer que la suite de fonctions (γ_k) converge localement uniformément sur U_0.
   (d) Montrer alors que Γ est une fonction holomorphe sur U_0.
   (e) Exprimer, pour $z \in U_0$, la dérivée $\Gamma'(z)$ sous forme d'une intégrale.
3. Montrer que, pour tout $z \in U_0$, on a l'égalité $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\Gamma(n) = (n-1)\,!$
5. Montrer que, pour tous $z \in U_0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\Gamma(z+n) = (z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$.
6. Montrer alors que la fonction Γ admet un unique prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier. On prolongera succesivement la fonction Γ à chaque ouvert U_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
7. Déterminer les pôles de la fonction Γ. Pour chacun d'entre eux, on précisera l'ordre et le résidu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = (-1)^n/n\,!$



Exercice 3 - Formule de Weierstrass
Soit z dans le demi-plan $\Re(z) > 0$.

1. Justifier que pour tout $0 \leq t \leq n$ on a
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$
En déduire que
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$$
2. Montrer l'égalité suivante
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$
3. En déduire que $1/\Gamma$ est une fonction entière et vérifie
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n^z n!} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$
avec γ la constante d'euler
$$\gamma := \lim(1 + 1/2 + \dots. + 1/n - \log n).$$

Exercice 4 - Formule de Stirling complexe
On note $B(t) = t - [t] - 1/2$ la première fonction de Bernoulli. On cherche à montrer la formule, vraie pour $s \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$:
$$\log\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\log(s) - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^{+\infty} \frac{B(t)}{s+t} dt.$$

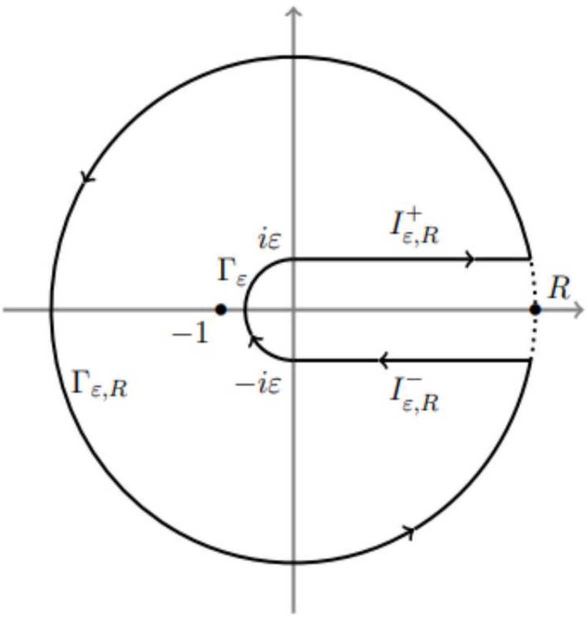
1. Soit f une fonction de variable réelle C^1. Montrer la formule de sommation d'Euler
$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) + \int_0^n B(t) f'(t) dt$$
2. On rappelle qu'une primitive de $\log(x)$ est $x\log(x) - x$. Appliquer la formule précédente aux fonctions $f(t) = \log(z+t)$ puis $f(t) = \log(1+t)$ et en déduire la formule
$$\begin{aligned}\log\left(\frac{z(z+1)\dots.(z+n)}{n!}\right) =&(z+n)\log(z+n) - z\log(z) - n + \frac{1}{2}(\log(z+n) + \log(z))\\ &- n\log(n+1) + n - \frac{1}{2}\log(n+1) + \int_0^n B(t)\left(\frac{1}{z+t} - \frac{1}{1+t}\right) dt\end{aligned}$$
3. En admettant que $C = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{B(t)}{1+t} dt = \frac{\log(2\pi)}{2}$, montrer la formule de Stirling complexe.
4. En déduire la formule de Stirling asymptotique
$$\Gamma(s) = s^{s-1/2} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right)$$
valable uniformément dans tout secteur $S(\delta, \varepsilon) = \{s = re^{i\theta}, r > \varepsilon \text{ et } -\pi + \delta \leq \theta \leq \pi - \delta\}$.
5. En déduire l'estimation (uniforme dans toute bande $a \leq \sigma = \mathrm{Re}(s) \leq b$, quand $|\tau|$ tend vers l'infini
$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim c(\sigma) \exp\left(-\frac{\pi}{2}|\tau|\right) |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

Exercice 5 - Formule des compléments
On cherche à montrer la formule des compléments, ie
$$\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) \in]0,1[\Longrightarrow \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer à l'aide du changement de variable $(t,s) \to (u,v) = \left(s+t, \frac{s}{t}\right)$ que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^\alpha(1+v)} dv.$$

2. Calculer I_α à l'aide du contour suivant.



3. Conclure.

Exercice 6 - Formule de multiplication

1. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! n^{1/2}} = \pi^{1/2}.$$

   On rappelle la formule de Stirling $n! \sim (2\pi)^{1/2} n^{n+1/2} e^{-n}$.

2. On rappelle la formule (voir TD sur Γ)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

   Montrer la formule de multiplication

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \pi^{1/2} 2^{1-2z} \Gamma(2z).$$

7.2 Fonction ζ de Riemann

Exercice 7 - Fonction ζ de Riemann

On introduit la fonction ζ :

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$$

1. Montrer que ζ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 1\}$.
2. Soient $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers. Montrer que $\forall z \in \Omega$, on a

$$\zeta(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-p_n^{-z}}$$

   On appelle ce produit le produit eulérien.

3. Montrer que
$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n\geq 1} \lambda(n) n^{-z}$$
où $\lambda(n) = \ln(p)$ si n est une puissance d'un nombre premier et $\lambda(n) = 0$ si n a au moins deux diviseurs premiers distincts.

Exercice 8 - Calcul des $\zeta(2k)$
Le but de cet exercice est de calculer $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la fonction $H(z) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et caractériser ses singularités et les résidus associés.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et Γ_N le contour carré orienté dans le sens direct, aux points $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$. Calculer l'intégrale
$$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} H(z) z^{-2k} dz$$
en fonction de $c_k := \operatorname{Res}\left(H(z)z^{-2k}; 0\right)$. Justifier que $\lim_{N\to\infty} I_N = 0$.
3. Les nombres de Bernouilli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définis par la série génératrice exponentielle
$$\frac{x}{e^x - 1} =: \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$$
Ceci signifie que $B_n = F_n(0)$, où $F_n(x) := \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$. Exprimer c_k en fonction d'un nombre de Bernoulli, et en déduire une expression de $\zeta(2k)$.

Exercice 9 - Fonction θ de Jacobi

1. Formule sommatoire de Poisson : l'objectif de cette question est de montrer le résultat suivant Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 tel que $\sum f(x+n)$ et $\sum f'(x+n)$ sont normalement convergentes quand x décrit $[0,1]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et on a
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{2i\pi k x}.$$
On pourra étudier la fonction $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ et calculer son k ième coefficient de Fourier, i.e.
$$c_k = \int_0^1 g(x) e^{-2i\pi k x} dx.$$
2. Calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne, ie pour $\alpha > 0$
$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\alpha t^2} e^{-2i\pi t x} dt.$$
On pourra dériver I.
3. On définit la fonction θ de Jacobi par
$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{n^2}.$$
De même, on définit la fonction $\Theta :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}, \Theta(x) = \theta\left(e^{-\pi x}\right)$ Montrer que Θ est bien définie et vérifie
$$\Theta(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 10 - Relation fonctionnelle de ζ
Soit $t > 0$ et $\psi(t) = \left(\theta\left(e^{-\pi t}\right) - 1\right)/2$. On rappelle que l'on définit la fonction Γ par
$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

et la fonction ζ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Rappeler dans quel espace est définie la fonction ζ.
2. Montrer que pour $\sigma = \Re(s) > 1$, on a

$$\zeta(s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} = \int_0^{+\infty} \psi(t) t^{s/2-1} dt$$

   On pourra effectuer le changement de variable $t = \pi n^2 x$.
3. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^{s/2-1} dt = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} \left(t^{-(s+1)/2} + t^{s/2-1}\right) \psi(t) dt$$

4. En déduire que la fonction ζ de Riemann se prolonge sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en une fonction holomorphe. Que dire de 1 ?
5. On pose la fonction $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Montrer que $\xi(s) = \xi(1-s)$.
6. Démontrer (à l'aide des exercices 4 et 5) l'équation fonctionnelle, pour $\mathbb{C}\backslash\{0; 1\}$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

   En déduire la valeur de $\zeta(-2k)$ pour $k > 0$ et $\zeta(-1)$.